गणित

कक्षा XI के लिए पाठ्यपुस्तक

भाग I
(प्रथम सत्र)

लेखक

अनूप राजपूत
जी.डी. ढल
हुकुम सिंह
एम.ए. पठान
मोहन लाल
पी.के. जैन
राम अवतार
एस.के. कौशिक
एस.के. भाम्बरी
एस.के.एस. गौतम
सुरजा कुमारी
वी.पी. सिंह

रूपान्तरणकर्ता

आर.एस. लाल
प्रभाकर मिश्रा
सुमत कुमार जैन

संपादक

हुकुम सिंह
राम अवतार
वी.पी. सिंह

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

प्राक्कथन

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् विगत चार दशकों से पाठ्चर्या के नवीनीकरण तथा विकास के क्षेत्र में कार्यरत रही है। इसी दिशा में किये जा रहे प्रयासों की श्रृंखला में परिषद् ने हाल ही में विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (2000) का प्रकाशन किया जिसके अन्तर्गत पाठ्यक्रम सम्बन्धी विभिन्न संदर्भों तथा महत्वपूर्ण पक्षों पर ध्यान दिया गया है। इस नीतिगत दस्तावेज में विज्ञान तथा गणित की शिक्षा–पद्धति में गुणात्मक सुधार की आवश्यकता पर बल दिया गया है। इसी संदर्भ में परिषद् ने उच्चतर माध्यमिक स्तर पर गणित विषय की शिक्षा–पद्धति में सुधार हेतु नया पाठ्यक्रम तथा मार्गदर्शक सिद्धान्त तैयार किये जो छात्रों के विभिन्न वर्गों की अपेक्षाओं तथा आवश्यकताओं को ध्यान में रखकर बनाये गये हैं। राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा के अनुसार पाठ्यक्रम को चार सत्रों में पढ़ाया जाना है। प्रथम सत्र में 11 अध्याय हैं जो कि अनिवार्य हैं। शेष तीन सत्रों को A, B, तथा C भागों में विभक्त किया गया है। भाग A सभी विद्यार्थियों के लिए अनिवार्य है तथा भाग B एवं भाग C ऐच्छिक हैं जिनमें से किसी एक का चुनाव विद्यार्थी विज्ञान तथा गैर विज्ञान की पृष्ठभूमि को आधार बनाकर अपने भविष्य की आवश्यकताओं को ध्यान में रखकर कर सकते हैं। इस प्रकार कोई भी छात्र इस पद्धति में अपनी रूचि के अनुसार भाग A और B अथवा भाग A और C में से किसी एक विकल्प का चयन कर सकता है। सत्र I और II के पाठ्यक्रम कक्षा XI के छात्रों को तथा सत्र III और IV के पाठ्यक्रम कक्षा XII के छात्रों को पढ़ाये जायेंगे।

इस पाठ्यक्रम का प्रथम प्रारूप एक लेखक मंडल द्वारा तैयार किया गया जिसके कुछ सदस्य परिषद् में कार्यरत हैं तथा अन्य बाह्य संस्थाओं से संबंधित हैं। इसके पश्चात् इस प्रारूप को मूल्यांकन और समीक्षा हेतु एक कार्यशाला में अनेक विशेषज्ञों तथा अध्यापकों के समक्ष प्रस्तुत किया गया जिनके द्वारा दिये गये महत्वपूर्ण सुझावों को इस प्रारूप में समायोजित किया गया। अन्ततः प्रकाशन से पूर्व पुस्तक की पांडुलिपि को विशेषज्ञों के एक समूह द्वारा संपादित किया गया।

लेखक मंडल ने उच्चतर माध्यमिक स्तर पर परिषद् द्वारा प्रकाशित पिछली गणित की पुस्तकों को संदर्भ में लिया है तथा इन पुस्तकों का उपयोग करने वालों से प्राप्त सुझावों का समुचित उपयोग करने का भी प्रयास किया है। मैं लेखक मंडल के सभी सदस्यों, मूल्यांकन हेतु आयोजित कार्यशाला में सम्मिलित सभी अध्यापकों एवं विशेषज्ञों द्वारा महत्वपूर्ण योगदान तथा

सुझावों के लिए धन्यवाद व्यक्त करता हूँ। विशेष रूप से मैं लेखक मंडल के अध्यक्ष, दिल्ली विश्वविद्यालय के प्रो. पवन कुमार जैन के प्रति कृतज्ञ हूँ जिनके कुशल शैक्षिक मार्ग–दर्शन में यह कार्य सम्पन्न हुआ।

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् इस पुस्तक में भावी संशोधन तथा परिष्कार हेतु पाठकों के महत्वपूर्ण सुझावों तथा परामर्शों का स्वागत करती है।

जे.एस. राजपूत
निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली
जुलाई 2002

प्रस्तावना

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् द्वारा उच्चतर माध्यमिक स्तर पर गणित विषय से सम्बन्धित नये दिशानिर्देश तथा पाठ्यक्रम 2001 के अनुरूप पाठ्यपुस्तक तैयार करने के उद्देश्य से एक लेखक मंडल का गठन किया गया। इस मंडल के सदस्यों द्वारा गहन चिंतन तथा व्यापक योजना के आधार पर एक विस्तृत रूपरेखा तैयार की गई।

गहन अध्ययन–विश्लेषण के उपरांत इस लेखक मंडल के विशेषज्ञों द्वारा इस परियोजना का प्रथम प्रारूप तैयार किया गया जिसमें परिषद् की ओर से प्रो. हुकुम सिंह, प्रो. सुरजा कुमारी, डा. राम अवतार, डा. वी.पी. सिंह, डा. एस.के.एस. गौतम, डा. अनूप राजपूत तथा डा. एम.ए. पठान, श्री मोहन लाल, श्री जी.डी. ढल, डा. एस.के. कौशिक, डा. एस.के. भाम्बरी बाह्य विशेषज्ञ के रूप में मेरे सहयोगी थे। इसके उपरान्त अनेक बैठकों में इस प्रारूप पर विभिन्न बिन्दुओं पर गहन विचार विमर्श किया गया। इसके पश्चात् एक राष्ट्रीय कार्यशाला में गठित विषय के अनुभवी अध्यापकों तथा विशेषज्ञों के समक्ष इस प्रारूप को समीक्षा एवं मूल्यांकन के लिए प्रस्तुत किया गया। इस कार्यशाला में सामने उभर कर आये महत्वपूर्ण सुझावों एवं परामर्शों को इस परियोजना के द्वितीय प्रारूप में समायोजित किया गया, जिसका परिष्कृत रूप आपके समक्ष पुस्तक के रूप में प्रस्तुत किया जा रहा है।

इस पुस्तक की सर्वाधिक महत्वपूर्ण विशेषता जो विशेषरूप से उल्लेखनीय है – वह यह है कि इस पुस्तक की सामग्री को हमने अनेक सरल उदाहरणों तथा अभ्यास प्रश्नों के माध्यम से सरल–सुबोध बनाने का प्रयास किया है। गणित की अनेक संकल्पनाओं तथा अवधारणाओं को छात्रोपयोगी बनाने की दिशा में हमने इन संकल्पनाओं तथा अवधारणाओं के व्यवहारिक प्रयोग भी प्रस्तुत किये हैं। यह प्रयास गणित की उपयोगिता को छात्रों के समक्ष प्रस्तुत करेगा और उनमें गणित के प्रति रुचि उत्पन्न करने में प्रेरणादायक होगा। इस पुस्तक में चयनित पाठ्य सामग्री छात्रों की विभिन्न क्षमताओं तथा अपेक्षाओं के अनुरूप सिद्ध होगी।

इस पुस्तक की कुछ महत्वपूर्ण उपलब्धियों तथा विशेषताएँ निम्न हैं –

1. प्रत्येक अध्याय का आरम्भ विषय के संक्षिप्त परिचय से किया गया है जो छात्रों में विषय के प्रति रुचि जाग्रत करने तथा उसका संवर्धन करने में सहायक है।

2. इस पुस्तक में 600 से भी अधिक उदाहरण तथा 250 के लगभग आकृतियाँ दी गई हैं जो सामान्यतः अन्य पुस्तक में दृष्टिगोचर नहीं होती।

3. इस पुस्तक में 1700 अभ्यास प्रश्न दिये गये हैं जो सिद्धांत तथा व्यवहार दोनों पक्षों पर समान रूप से बल देते हैं इसके साथ ही प्रत्येक अध्याय के अंत में विविध प्रश्नावली शीर्षक के अन्तर्गत मिश्रित प्रश्न दिये गये हैं।

4. इस पुस्तक में अनुप्रयोगों से संबंधित अनेक प्रश्न भी प्रस्तुत किये गये हैं।

5. अधिकांशतः सभी अध्याय ऐतिहासिक टिप्पणियों के साथ समाप्त होते हैं। ये टिप्पणियाँ पुस्तक को रूचिकर बनाने में तो सहायक है ही, प्रस्तुत विषय–सामग्री की ऐतिहासिक पृष्ठभूमि तथा महत्व को भी रेखांकित करती हैं।

मैं विशेष रूप से राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् के निदेशक प्रो. जे.एस. राजपूत का आभारी हूँ जिन्होंने इस पुस्तक के निर्माण हेतु इस लेखक मंडल का गठन किया तथा मुझे इस कार्य में सहभागिता का निमंत्रण देकर गणित की शिक्षा पद्धति में संशोधन करने का अवसर प्रदान किया। इस चुनौतीपूर्ण कार्य को संपन्न करने में उनके द्वारा प्रदत्त स्वस्थ वातावरण तथा अनुकूल परिस्थितियों ने आनंददायक बनाया।

इसके साथ ही मैं इस पुस्तक के लेखक मंडल के समस्त सदस्यों के प्रति आभार व्यक्त करता हूँ, जिन्होंने अपना मूल्यवान समय देकर पुस्तक को तैयार किया। उन शिक्षकों तथा विशेषज्ञों का भी मैं हृदय से आभारी हूँ जिनके सुझाव हमें समय–समय पर प्राप्त होते रहे। परिषद् के संयुक्त निदेशक प्रो. एम.एस. खापर्डे, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के अध्यक्ष प्रो. आर.डी. शुक्ल का भी मैं हृदय से आभारी हूँ जिनका बहुमूल्य सहयोग मुझे तथा लेखक मंडल को सदैव प्राप्त होता रहा।

मैं विशेष रूप से आभारी तथा ऋणी हूँ लेखक मंडल के संयोजक प्रो. हुकुम सिंह का जिनके सहयोग तथा समन्वय के बिना इस परियोजना का पूर्ण होना संभव नहीं था। उन्होंने एक कुशल संयोजक के रूप में इस कार्य के निर्वाह में सक्रिय तथा सृजनात्मक भूमिका का निर्वाह किया। मैं प्रो. सुरजा कुमारी, डा. राम अवतार, डा. वी.पी. सिंह, डा. एस.के.एस. गौतम तथा डा. अनूप राजपूत के प्रति आभार व्यक्त करता हूँ जिन्होंने इस ग्रंथ की प्रकाशन योग्य पांडुलिपि तैयार करने में अथक परिश्रम किया।

इस पाठ्यपुस्तक का हिन्दी रूपान्तरण प्रो. आर.एस. लाल, प्रो. प्रभाकर मिश्र और श्री सुमत कुमार जैन ने किया है। हिन्दी पांडुलिपि का विषय संपादन प्रो. हुकुम सिंह, डा. राम अवतार और डा. वी.पी. सिंह ने किया। मैं इन सभी का आभारी हूँ।

इसके अतिरिक्त मैं कंप्यूटर सहायक श्री नरेन्द्र कुमार के प्रति भी धन्यवाद व्यक्त करता हूँ जिन्होंने हस्तलिखित सामग्री को टंकित किया।

इस पुस्तक में हम संशोधन–सुधार के लिए पाठकों के अमूल्य सुझावों का स्वागत करेंगे।

पवन कुमार जैन
अध्यक्ष
लेखक दल

लेखक और प्रतिभागी
पाठ्यपुस्तक के विकास और समीक्षा हेतु कार्यशाला

प्रो. पी.के. जैन (अध्यक्ष)
गणित विभाग
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

ए.एस. मिश्रा
पी.जी.टी.
जवाहर नवोदय विद्यालय, डाभासेमर
फैजाबाद, उत्तर प्रदेश

अनीता शर्मा
पी.जी.टी.
हन्स राज मॉडल स्कूल
पंजाबी बांग, नई दिल्ली

आशा मिश्रा
पी.जी.टी.
केन्द्रीय विद्यालय
आई.आई.टी. कल्यानपुर
कानपुर, उत्तर प्रदेश

जी.डी. ढल
अवकाश प्राप्त रीडर (एन सी ई आर टी)
के–171, एल.आई.सी. कालोनी
पश्चिम विहार, नई दिल्ली

ज्योती दास
प्रोफेसर गणित विभाग
कलकत्ता विश्वविद्यालय,
कोलकाता

के.एस. मान्गवानी
लेक्चरर
राजकीय मॉडल स्कूल, टी.टी. नगर
भोपाल, मध्य प्रदेश

एम.ए. पठान
प्रोफेसर गणित विभाग
अलीगढ़ मुस्लिम विश्वविद्यालय
अलीगढ़, उत्तर प्रदेश

मिलिन्द मनोहर खचोने
पी.जी.टी.
डी.ए.वी. पब्लिक स्कूल
गुड़गांव, हरियाणा

मोहन लाल
(अवकाश प्राप्त प्राचार्य)
डी.ए.वी. कालेज मैनेजमेंन्ट कमेटी
ई–182, राजिन्दर नगर, नई दिल्ली

एन.के. चौहान
पी. जी. टी.
केन्द्रीय विद्यालय
जे. एन. यू. कैम्पस, नई दिल्ली

पी. के. तिवारी
अवकाश प्राप्त सहायक कमिश्नर
केन्द्रीय विद्यालय संगठन
फ्लैट नं. O-460, जलवायु विहार
सेक्टर 30, गुड़गांव, हरियाणा

पूरन सिंह
पी.जी.टी.
जवाहर नवोदय विद्यालय, जटरोड़ा
सवाई माधोपुर, राजस्थान

आर.एस. गर्ग
पी.जी.टी.
केन्द्रीय विद्यालय, मुराद नगर
गाजियाबाद, उत्तर प्रदेश

सस्मिता मिश्र
पी.जी.टी.
केन्द्रीय विद्यालय, रायवाला
देहरादून, उत्तरांचल

शालनी दीक्षित
पी.जी.टी.
केन्द्रीय विद्यालय, न्यू कैंट
इलाहाबाद, उत्तर प्रदेश

शारदा रानी
पी.जी.टी.
सी.एल. भल्ला दयानन्द मॉडल स्कूल
झंडेवालान, करोलबाग, नई दिल्ली

सुशीला गर्ग
पी.जी.टी.
सर्वोदय विद्यालय, जोरबाग
नई दिल्ली

एस.के. भाम्बरी
रीडर, किरोड़ीमल कालेज
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

एस.के. कौशिक
रीडर, किरोड़ीमल कालेज
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

यू.वी. तिवारी
प्रोफेसर, गणित विभाग
आई.आई.टी. कानपुर, उत्तर प्रदेश

एन.सी.ई.आर.टी. संकाय

अनूप राजपूत
के.ए.एस.एस.वी.कामेश्वर राव
महेन्द्र शंकर
राम अवतार
आर.पी. मौर्या
एस.के.एस. गौतम
वी.पी. सिंह
(श्रीमती) सुरजा कुमारी
हुकुम सिंह **(संयोजक)**

रूपान्तरणकर्ता और प्रतिभागी
पाठ्यपुस्तक का हिन्दी रूपान्तरण एवं समीक्षा हेतु कार्यशाला

आर.एस. गर्ग
पी.जी.टी., केन्द्रीय विद्यालय, मुरादनगर,
उत्तर प्रदेश

आर.एस. चौहान
अवकाश प्राप्त प्रोफेसर
ए–35, कस्तूरबा नगर, भोपाल
मध्य प्रदेश

रविन्दर सिंह पवांर
पी.जी.टी.
एम.बी.डी.ए.वी. उच्चतर माध्यमिक विद्यालय
यूसूफ सराय, नई दिल्ली

रमाशंकर लाल
(अवकाश प्राप्त प्रोफेसर एवं अध्यक्ष)
गणित विभाग
डी.ए.वी.पी.जी. कालेज, सिवान
बिहार

प्रभाकर मिश्रा
बी–18, गोविन्दपुर कालोनी, इलाहाबाद
उत्तर प्रदेश

जी.डी. ढल
के–171, एल.आई.सी. कालोनी
पश्चिम विहार, नई दिल्ली

वेद डुडेजा
उप प्राचार्य
राजकीय कन्या माध्यमिक विद्यालय
सैनिक विहार, दिल्ली

सुमत कुमार जैन
लेक्चरर, गणित
के.एल. जैन इंटर कालेज, ससनी
हाथरस, उत्तर प्रदेश

आर.पी. गिहारे
लेक्चरर, राजकीय कन्या उच्चतर
माध्यमिक विद्यालय, चिचोली, बेतुल, मध्य प्रदेश

एन.के. चौहान
पी.जी.टी., केन्द्रीय विद्यालय,
जे.एन.यू. कैम्पस, नई दिल्ली

पी.डी. चतुर्वेदी
पी.जी.टी., केन्द्रीय विद्यालय, सेक्टर–2
आर.के. पुरम्, नई दिल्ली

पी.के. जैन
गणित विभाग
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

पी.के. तिवारी
अवकाश प्राप्त सहायक कमिश्नर
केन्द्रीय विद्यालय संगठन
फ्लैट नं. O-460, जलवायु विहार
सेक्टर–30, गुड़गांव, हरियाणा

एन.सी.ई.आर.टी. संकाय
राम अवतार
वी.पी. सिंह
(श्रीमती) सुरजा कुमारी
हुकुम सिंह **(संयोजक)**

विषय–सूची

समुच्चय (SETS)

अध्याय 1

1.1 भूमिका

समुच्चय की संकल्पना गणित की सभी शाखाओं की आधारभूत है। संबंधों एवं फलनों, अनुक्रमों, ज्यामिति, प्रायिकता सिद्धांत इत्यादि की आधारशिला में इसका विशेष महत्व प्रमाणित हो चुका है। समुच्चयों के अध्ययन के अनेक अनुप्रयोग तर्कशास्त्र, दर्शनशास्त्र इत्यादि में हैं।

जर्मनी के गणितज्ञ जार्ज केन्टर (Georg Cantor) (1845-1918 A.D.) ने समुच्चय सिद्धान्त को विकसित किया था। सर्वप्रथम त्रिकोणमितीय श्रेणी की समस्याओं पर कार्य करते समय उनका समुच्चय से परिचय हुआ। इस अध्याय में हम समुच्चय से संबंधित कुछ मूलभूत परिभाषाओं और संक्रियाओं की चर्चा करेंगे।

1.2 समुच्चय और उनका निरूपण (Sets and Their Representations)

जीवन में प्रतिदिन हम विशेष प्रकार की वस्तुओं के समूह यथा ताश की गड्डी, जानवरों का झुण्ड, व्यक्तियों की भीड़, क्रिकेट–टीम इत्यादि के बारे में प्रायः चर्चा करते हैं। गणित में भी हम विभिन्न समूहों, उदाहरणतः प्राकृत संख्याओं के समूह, समतल के बिन्दुओं का समूह, अभाज्य संख्याओं के समूह, पर विचार करते हैं। विशेष रूप से हम निम्न समूहों का परीक्षण करते हैं:

(i) 10 से कम विषम प्राकृत संख्याएँ अर्थात् 1,3,5,7,9,

(ii) भारत की नदियाँ,

(iii) अंग्रेजी वर्णमाला के स्वर अर्थात् $a,e,i,o,u,$

(iv) 210 के अभाज्य गुणनखंड, अर्थात् 2,3,5 तथा 7,

(v) समीकरण $x^2 - 5x + 6 = 0$ के हल अर्थात् 2 तथा 3,

हम ध्यान देते हैं कि उपर्युक्त संग्रहों में से प्रत्येक में वस्तुओं का सुपरिभाषित *(well defined)* संग्रह है जिसका अर्थ है कि हम निश्चयपूर्वक यह निर्णय कर सकते हैं कि दी हुई वस्तु समुच्चय का सदस्य है या नहीं है। उदाहरणतः 'नील नदी' भारत की नदियों के समूह का सदस्य नहीं है जब कि दूसरी ओर गंगा नदी इस समूह का सदस्य है।

तथापि निम्नलिखित समूह सुपरिभाषित नहीं है।

(i) एक विद्यालय की ग्यारहवीं कक्षा के प्रतिभाशाली छात्रों का समूह।
(ii) विश्व के प्रसिद्ध गणितज्ञों का समूह।
(iii) विश्व की सुन्दर लड़कियों का समूह।
(iv) मोटे व्यक्तियों का समूह।

उदाहरण के लिए (ii) में प्रसिद्ध गणितज्ञों के निर्णय करने की कसौटी एक व्यक्ति से दूसरे व्यक्ति के लिए भिन्न–भिन्न हो सकती है। अतः यह एक सुपरिभाषित संग्रह नहीं है।

इस प्रकार *समुच्चय वस्तुओं का सुपरिभाषित संग्रह* है। निम्नलिखित बिन्दुओं पर ध्यान दें:

(i) समुच्चय की वस्तुएँ, अवयव तथा सदस्य पर्यायवाची शब्द हैं। ये अपरिभाषित हैं।
(ii) प्रायः समुच्चय को अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों यथा A, B, C, X, Y, Z इत्यादि से निरूपित किया जाता है।
(iii) समुच्चय के अवयवों को अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों यथा a, b, c, x, y, z इत्यादि से प्रदर्शित किया जाता है।

यदि a, समुच्चय A का अवयव है, हम कहते हैं कि 'a समुच्चय A में हैं' (a belongs to A) वाक्यांश 'सदस्य है' या' 'में है' को यूनानी प्रतीक "$\in$" से निरूपित करते हैं। इस प्रकार हम $a \in$ A लिखते हैं। यदि b, समुच्चय A का अवयव नहीं है, हम $b \notin$ A लिखते हैं, तथा इसे "b समुच्च्य A में नहीं है" (b does not belong to A) पढ़ते हैं। इस प्रकार अंग्रेजी वर्णमाला के स्वरों के समुच्चय V में, $a \in$ V परन्तु $l \notin$ V. 30 के अभाज्य गुणनखण्डों के समुच्चय P में, 3 $\in$ P परन्तु 15 $\notin$ P.

समुच्चय को निरूपित करने की दो विधियाँ हैं :

(i) रोस्टर (Roster) या सारणीबद्ध रूप (Tabular Form)
(ii) समुच्चय निर्माण रूप (Set builder form)

(i) रोस्टर रूप में, समुच्चय के सभी अवयवों को सूचीबद्ध किया जाता है, अवयवों को अर्द्ध विराम (comma) से पृथक किया जाता है तथा सभी को मझलें कोष्ठक { } में रखते हैं। उदाहरणतः, 7 से छोटे सभी सम पूर्णांकों के समुच्चय को रोस्टर रूप में $\{2, 4, 6\}$ द्वारा व्यक्त करते हैं। समुच्चय को रोस्टर रूप में प्रदर्शित करने के कुछ उदाहरण निम्नलिखित हैं :

(a) $\{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$ उन सभी प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है, जो 42 के भाजक हैं। ध्यान दीजिए कि रोस्टर रूप में अवयवों को सूचीबद्ध करने में क्रम का महत्व नही है। इस प्रकार, उपर्युक्त समुच्चय को $\{1, 3, 7, 21, 2, 6, 14, 42\}$ द्वारा भी प्रदर्शित कर सकते हैं।

(b) $\{a,e,i,o,u\}$ अंग्रेजी वर्णमाला के सभी स्वरों का समुच्चय है।

(c) विषम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय $\{1,3,5,...\}$ द्वारा प्रदर्शित है। अन्त के तीन बिन्दु बताते हैं कि यह सूची अन्तहीन है।

यह ध्यान रखना होगा कि समुच्चय को रोस्टर रूप में लिखते समय एक अवयव की प्रायः पुनरावृत्ति नहीं की जाती है अर्थात सभी अवयव भिन्न भिन्न लिए जाते हैं। उदाहरणतः {S,C,H,O,L}उन सभी अक्षरों का समुच्चय है, जिनसे "SCHOOL" बनता है।

(ii) समुच्चय निर्माण रूप में, समुच्चय के सभी अवयवों में एक सर्वनिष्ठ गुणधर्म होता है जो समुच्चय के बाहर के किसी अवयव में नहीं होता है। उदाहरणतः समुच्चय "$\{a,e,i,o,u\}$" के सभी अवयवों में एक सर्वनिष्ठ गुणधर्म है, कि उनमें से प्रत्येक अवयव अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है और इस गुणधर्म वाला अन्य कोई अक्षर नहीं है। इस समुच्चय को V से निरूपित करते हुए, हम V = $\{x$: x अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है $\}$ लिखते हैं।

यह ध्यान रखना होगा कि हम समुच्चय के अवयवों के लिए चर x का प्रयोग करके समुच्चय का वर्णन करते हैं (x के स्थान पर किसी अन्य चर जैसे y, z इत्यादि का भी प्रयोग किया जा सकता है।) कोलन (:) चिह्न के बाद समुच्चय के अवयवों के विशिष्ट गुणधर्म को लिखते हैं और तब सम्पूर्ण वर्णन को कोष्ठक { } में कोष्ठबद्ध करते हैं। समुच्चय V के उपर्युक्त वर्णन को पढ़ेंगे "सभी x का समुच्चय जहाँ x अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है"। इस वर्णन में कोष्ठक सभी x का समुच्चय, कोलन (:) "जहाँ" (such that) के लिए प्रयुक्त है।

उदाहरणतः, समुच्चय A = $\{x$: x एक प्राकृत संख्या है और $3 < x < 10\}$ के वर्णन को निम्न प्रकार पढ़ा जाता है। "सभी x का समुच्चय जहाँ x एक प्राकृत संख्या है और $3 < x < 10$". अतः संख्याएँ 4,5,6,7,8 और 9 समुच्चय A के सदस्य हैं।

यदि हम रोस्टर रूप में उपर्युक्त (a), (b) और (c) में वर्णित समुच्चयों को क्रमशः A, B, C से निरूपित करें, तो A, B, C को समुच्चय निर्माण रूप में निम्नलिखित ढ़ंग से निरूपित किया जा सकता है।

A = $\{x$: x एक प्राकृत संख्या है जो 42 की भाजक है$\}$

B = $\{y$: y अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है $\}$

C = $\{z$: z एक विषम प्राकृत संख्या है $\}$

उदाहरण 1 अंग्रेजी वर्णमाला के उन सभी स्वरों का समुच्चय लिखिए जो q के पूर्ववर्ती हैं।

हल q के पूर्ववर्ती स्वर a,e,i,o हैं। इस प्रकार A = $\{a,e,i,o\}$ अंग्रेजी वर्णमाला के उन सभी स्वरों का समुच्चय है जो q के पूर्ववर्ती हैं।

उदाहरण 2 सभी धन पूर्णांकों का समुच्चय लिखिए जिनके घन विषम हैं।

हल एक सम पूर्णांक का घन भी सम पूर्णांक होता है। इसलिए, अभीष्ट समुच्चय के सदस्य सम नहीं हो सकते तथा एक विषम संख्या का घन विषम होता है। इसलिए, अभीष्ट समुच्चय के सदस्य सभी धन विषम पूर्णांक हैं। अतः समुच्चय निर्माण रूप में इसे {x : x एक धन विषम पूर्णांक है} या समानरूप से {$2k + 1$: $k \geq 0$, k एक धन पूर्णांक है} लिखते हैं।

उदाहरण 3 समुच्चय निर्माण रूप में ऐसी वास्तविक संख्याओं को लिखिए जिन्हें दो पूर्णांको के भागफल के रूप में नहीं लिखा जा सकता है।

हल हम देखते हैं कि अभीष्ट संख्याएँ परिमेय संख्याएँ नहीं हो सकतीं क्योंकि एक परिमेय $\frac{p}{q}$ रूप की संख्या है जहाँ p,q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$। इस प्रकार, ये सभी संख्याएँ वास्तविक तथा अपरिमेय होनी चाहिए। अतः समुच्चय निर्माण रूप में इस समुच्चय को {x : x वास्तविक तथा अपरिमेय संख्या है} लिखा जाता है।

उदाहरण 4 समुच्चय $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}\right\}$ को समुच्चय निर्माण रूप में लिखिए।

हल दिये समुच्चय के प्रत्येक सदस्य में हर अंश से एक अधिक है तथा अंश 1 से प्रारम्भ होता है और 6 से अधिक नहीं है। अतः दिये हुए समुच्चय का समुच्चय निर्माण रूप निम्नांकित है :

$$\left\{x : x = \frac{n}{n+1}, n \text{ एक प्राकृत संख्या है और } 1 \leq n \leq 6\right\}$$

उदाहरण 5 बाँयी ओर रोस्टर रूप में निरूपित प्रत्येक समुच्चय का दाँयी ओर समुच्चय निर्माण रूप में निरूपित समुच्चय से जोड़ा बनाइए :

(i) {L, I, T, E}	(a) {x : x एक धन पूर्णांक है तथा 18 का भाजक है}
(ii) {0}	(b) {x : x एक पूर्णांक है और $x^2 - 9 = 0$}
(iii) {1,2,3,6,9,18}	(c) {x : x एक पूर्णांक है और $x + 1 = 1$}
(iv) {3, –3}	(d) {x : x शब्द LITTLE का एक अक्षर है}

हल चूँकि (d) में, शब्द LITTLE में छः अक्षर हैं और दो अक्षर T और L की पुनरावृत्ति हुई है, इसलिए (i) तथा (d) का जोड़ा बना। उसी प्रकार, (ii) का (c) से जोड़ा बनता है क्योंकि $x + 1 = 1$ का अर्थ है $x = 0$ तथा 1, 2, 3, 6, 9, 18 सभी 18 के भाजक हैं, इसलिए, (iii) का (a) से जोड़ा बना। अन्त में, $x^2 - 9 = 0$ का अर्थ है $x = 3, -3$, इसलिए (iv) का (b) से जोड़ा बना।.

उदारहण 6 समुच्चय {x : x एक धन पूर्णांक है और $x^2 < 40$} को रोस्टर रूप में लिखिए।

हल अभीष्ट संख्याएँ 1, 2, 3, 4, 5, 6 हैं। इसलिए, रोस्टर रूप में दिया समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5, 6} है।

प्रश्नावली 1.1

1. निम्नलिखित में कौन से समुच्चय हैं? अपने उत्तर का औचित्य बताइए ।

(i) J अक्षर से प्रारम्भ होने वाले वर्ष के सभी महीनों का समूह।

(ii) भारत के अत्यधिक प्रतिभाशाली लेखकों का समूह।

(iii) विश्व के सर्वश्रेष्ठ ग्यारह क्रिकेट बल्लेबाजों का समूह।

(iv) आपकी कक्षा के सभी लड़कों का समूह।

(v) 100 से कम सभी प्राकृत संख्याओं का समूह।

(vi) लेखक प्रेमचन्द द्वारा लिखित उपन्यासों का समूह।

(vii) सभी सम पूर्णांकों का समूह।

(viii) इस अध्याय के विभिन्न प्रश्नों का समूह।

(ix) विश्व के सबसे अधिक खतरनाक जानवरों का समूह।

2. मान लीजिए $A = \{1,2,3,4,5,6\}$। रिक्त स्थानों में उपयुक्त प्रतीक $\in$ या $\notin$ को रखिए :

(i) 5 — A (ii) 8 — A (iii) 0 — A

(iv) 4 — A (v) 2 — A (vi) 10 — A

3. निम्नलिखित समुच्चयों को रोस्टर रूप में लिखिए :

(i) $A = \{x : x$ एक पूर्णांक है, और $-3 \le x < 7\}$

(ii) $B = \{x : x$, 6 से छोटी एक प्राकृत संख्या है$\}$

(iii) $C = \{x : x$ दो अंकों की ऐसी प्राकृत संख्या है जिसके अंकों का योग 8 है$\}$

(iv) $D = \{x : x$ एक अभाज्य संख्या है जो 60 की भाजक है$\}$

(v) E = TRIGONOMETRY शब्द के सभी अक्षरों का समुच्चय।

(vi) F = SETS शब्द के सभी अक्षरों का समुच्चय।

4. समुच्चय निर्माण रूप में निम्नलिखित समुच्चयों को व्यक्त कीजिए :

(i) $A = \{1,3,5,7,9\}$

(ii) $B = \{2,4,6,8\}$

(iii) $C = \{-1, 1\}$

(iv) $D = \{1, 5, 10, 15, \ldots\}$

(v) $E = \{14, 21, 28, 35, 42, \ldots, 98\}$

5. निम्नलिखित समुच्चयों के सभी सदस्यों को सूचीबद्ध कीजिए :

(i) $A = \{x : x$ एक विषम प्राकृत संख्या है$\}$

(ii) $B = \{x : x$ एक पूर्णांक है, $-\frac{1}{2} < x < \frac{9}{2}\}$

(iii) $C = \{x : x$ एक पूर्णांक है, $x^2 \le 4\}$

(iv) $D = \{x : x$ "LOYAL" शब्द का एक अक्षर है$\}$

(v) $E = \{x : x$ वर्ष का एक माह है जिसमें 31 दिन नहीं होते हैं$\}$

(vi) $F = \{x : x$ अंग्रेजी वर्णमाला का एक व्यंजन है जो k का पूर्ववर्ती है$\}$

6. बाँयी ओर रोस्टर रूप के प्रत्येक समुच्चय के संगत दाँयी ओर समुच्चय निर्माण रूप में वर्णित समुच्चय से जोड़ा बनाइए :

(i) $\{1,2,3,6\}$	(a) $\{x : x$ एक अभाज्य संख्या है और 6 की भाजक है$\}$
(ii) $\{2,3\}$	(b) $\{x : x$, 10 से छोटी एक विषम प्राकृत संख्या है$\}$
(iii) $\{H,A,R,Y,N\}$	(c) $\{x : x$, एक प्राकृत संख्या है, और 6 की भाजक है$\}$
(iv) $\{1,3,5,7,9\}$	(d) $\{x : x$, HARYANA शब्द का एक अक्षर है$\}$

1.3 रिक्त समुच्चय (The Empty Set)

विचार कीजिए कि

समुच्चय $A = \{x : x$ स्कूल की वर्तमान कक्षा XI में अध्ययनरत एक विद्यार्थी है।$\}$.

हम विद्यालय जा सकते हैं, तथा विद्यालय की वर्तमान कक्षा XI में अध्ययनरत विद्यार्थियों को गिन सकते हैं। इस प्रकार समुच्चय A के अवयवों की संख्या परिमित है।

विचार कीजिए कि समुच्चय $\{x : x$ एक पूर्णांक है, $x^2 + 1 = 0\}$ पर विचार कीजिए। हम जानते हैं कि ऐसा कोई पूर्णांक नहीं है जिसका वर्ग -1 हो। इसलिए, उपर्युक्त समुच्चय में कोई अवयव नहीं है।

अब हम समुच्चय B को निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं :

$B = \{x : x$ वर्तमान में कक्षा X तथा XI दोनों में अध्ययनरत विद्यार्थी है$\}$

हम ध्यान देते हैं कि एक विद्यार्थी कक्षा X तथा XI में साथ–साथ अध्ययन नहीं कर सकता है। अतः समुच्चय B में कोई भी अवयव नहीं है।

परिभाषा 1 जिस समुच्चय में एक भी अवयव नहीं होता है, उसे रिक्त समुच्चय या शून्य समुच्चय कहते हैं।

इस परिभाषा के अनुसार B रिक्त समुच्चय है जबकि A रिक्त समुच्चय नहीं है। रिक्त समुच्चय को प्रतीक 'ϕ' (फाई) से प्रदर्शित करते हैं। हम रिक्त समुच्चयों के कुछ और उदाहरण देते हैं।

(i) मान लीजिए $P = \{ x : 1 < x < 2, x$ एक प्राकृत संख्या है।$\}$, तो P रिक्त समुच्चय है क्योंकि 1 और 2 के मध्य कोई भी प्राकृत संख्या नहीं होती है।

(ii) मान लीजिए $Q = \{x : x^2 - 2 = 0$ और x परिमेय संख्या है$\}$, तो Q रिक्त समुच्चय है क्योंकि समीकरण $x^2 - 2 = 0$ किसी भी परिमेय संख्या x से संतुष्ट नहीं होता है।

(iii) मान लीजिए R = { x : x, 2 से बड़ी एक अभाज्य सम संख्या है }, तो R रिक्त समुच्चय है, क्योंकि केवल 2 ही अभाज्य सम संख्या है।

(iv) मान लीजिए S = {x : $x^2 = 4$, और x एक विषम पूर्णांक है}, तो S रिक्त समुच्चय है, क्योंकि समीकरण $x^2 = 4$, x के किसी भी विषम मान से संतुष्ट नहीं होती है।

1.4 परिंमित (Finite) और अपरिमित (Infinite) समुच्चय

मान लीजिए A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {a, b, c, d, e, f} और C = { विश्व के पुरुष } हैं।

हम ध्यान देते हैं, कि A में 5 अवयव हैं और B में 6 अवयव हैं। C में कितने अवयव हैं? स्पष्ट है, हम C के अवयवों की यथार्थ संख्या नहीं जानते हैं, लेकिन यह कोई प्राकृत संख्या है जो एक बहुत बड़ी संख्या हो सकती है। समुच्चय A के अवयवों की संख्या से हमारा अभिप्राय समुच्चय के विभिन्न अवयवों की संख्या से है और इसे हम n(A) द्वारा निरूपित करते हैं। यदि n(A) एक प्राकृत संख्या है, तो A एक परिमित समुच्चय है अन्यथा A, अपरिमित समुच्चय कहलाता है। आइए प्राकृत संख्याओं के समुच्चय **N** पर विचार करते हैं। हम देखते हैं कि इस समुच्चय के अवयवों की संख्या n(**N**) परिमित नहीं है क्योंकि प्राकृत संख्याएँ अनगिनत होती हैं। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि प्राकृत संख्याओं का समुच्चय एक अपरिमित समुच्चय है।

परिभाषा 2 एक समुच्चय, जो रिक्त है या जिसके अवयवों की संख्या निश्चित है, परिमित समुच्चय कहलाता है, अन्यथा, समुच्चय अपरिमित कहलाता है।

हम संख्याओं के विभिन्न समुच्चयों को निम्नलिखित प्रतीकों से निरूपित करेंगे :

N : प्राकृत संख्याओं का समुच्चय
Z : पूर्णांकों का समुच्चय
Q : परिमेय संख्याओं का समुच्चय
R : वास्तविक संख्याओं का समुच्चय
$\mathbf{Z}^+$: धन पूर्णांकों का समुच्चय
$\mathbf{Q}^+$: धन परिमेय संख्याओं का समुच्चय
$\mathbf{R}^+$: धन वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

आइए, हम कुछ उदाहरणों पर विचार करें :

(i) मान लीजिए M सप्ताह के दिनों का समुच्चय है, तो M परिमित है।

(ii) सभी परिमेय संख्याओं का समुच्चय **Q** अपरिमित समुच्चय है।

(iii) मान लीजिए S समीकरण $x^2 - 16 = 0$ के हलों का समुच्चय है, तो S परिमित है।

(iv) मान लीजिए कि रेखा के सभी बिन्दुओं का समुच्चय G हैं, तो G अपरिमित समुच्चय है।

जब हम एक समुच्चय को रोस्टर रूप में निरूपित करते हैं तब हम समुच्चय के सभी अवयवों को कोष्ठक { } में लिखते हैं। एक अनन्त समुच्चय के सभी अवयवों को कोष्ठक के भीतर लिखना सम्भव नहीं है। इसलिए हम कुछ अनन्त समुच्चयों को रोस्टर रूप द्वारा निरूपण में कुछ अवयवों को लिखकर, जो समुच्चय के स्वरूप को स्पष्टतः बताते हैं, उसके बाद तीन बिन्दु लगाते हैं।

उदाहरणतया, {1, 2, 3, 4, ...} प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है, {1, 3, 5, 7, 9, ...}, विषम प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय है और {..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...} पूर्णांकों का समुच्चय है। परन्तु वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को इस रूप में प्रदर्शित नहीं किया जा सकता क्योंकि इस समुच्चय के अवयवों का कोई विशेष प्रतिरूप नहीं है।

1.5 समान (Equal) और तुल्य (Equivalent) समुच्चय

दो दिये गए समुच्चयों A और B में, यदि A का प्रत्येक अवयव B का भी अवयव है और B का प्रत्येक अवयव A का भी अवयव है, तो समुच्चय A और B समान कहलाते हैं। स्पष्टतः दोनों समुच्चयों में यथार्थ रूप से समान अवयव होते हैं।

परिभाषा 3 समुच्चय A तथा B समान कहलाते हैं यदि उनमें यथार्थ रूप से समान अवयव हो और उसे हम $A = B$ लिखते हैं। अन्यथा समुच्चय असमान *(unequal)* कहलाते हैं और हम $A \neq B$ लिखते हैं।

आइए, हम निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें:

(i) मान लीजिए A = { 1, 2, 3, 4, } और B = { 3, 1, 4, 2} तो, A = B

(ii) मान लीजिए A, 6 से कम अभाज्य संख्याओं का समुच्चय और P, 30 के अभाज्य गुणनखण्डों का समुच्चय है। स्पष्टतः समुच्चय A तथा P समान हैं क्योंकि 2, 3 और 5 ही केवल 30 के अभाज्य गुणनखण्ड हैं और 6 से कम भी हैं।

आइए, हम दो समुच्चयों L = { 1, 2, 3, 4 } और M = {1, 2, 3, 8} पर विचार करें। दोनों में से प्रत्येक में चार अवयव हैं लेकिन वे बराबर नहीं है।

परिभाषा 4 परिमित समुच्चय A तथा B तुल्य *(equivalent)* कहे जाते हैं यदि उनमें अवयवों की संख्या समान हो। उसे हम $A \approx B$ लिखते हैं।

उदाहरणतया मान लीजिए $A = \{a, b, c, d, e\}$ और B = {1, 3, 5, 7, 9} तो A और B तुल्य समुच्चय हैं।

स्पष्टतः सभी समान समुच्चय तुल्य समुच्चय होते हैं परन्तु सभी तुल्य समुच्चय समान समुच्चय नहीं होते हैं।

उदाहरण 7 समान समुच्चयों के युग्म छाँटिए, यदि ऐसा कोई है, और कारण भी बताइए :

$A = \{ 0 \}$, $B = \{x : x > 15$ और $x < 5 \}$, $C = \{x : x - 5 = 0\}$, $D = \{x : x^2 = 25\}$
$E = \{x : x$ समीकरण $x^2 - 2x - 15 = 0$ का एक धनात्मक पूर्णांक मूल है$\}$

हल चूँकि $0 \in A$ और 0 समुच्चयों B, C, D और E में से किसी में भी नहीं है। इसलिए, $A \neq B$, $A \neq C$, $A \neq D$, $A \neq E$ है, $B = \phi$ लेकिन अन्य कोई समुच्चय रिक्त नहीं है। अतः $B \neq C$, $B \neq D$ और $B \neq E$. $C = \{5\}$ लेकिन $-5 \in D$ अतः $C \neq D$. चूँकि $E = \{5\}$, $C = E$, $D = \{-5, 5\}$ और $E = \{5\}$, इसलिए $D \neq E$. इस प्रकार, समान समुच्चयों का युग्म केवल C और E है।

उदाहरण 8 निम्नलिखित समुच्चय युग्म में से कौन समान हैं? अपने उत्तर का औचित्य बताइए।

(i) A, "ALLOY" के अक्षरों का समुच्चय और B, "LOYAL" के अक्षरों का समुच्चय।
(ii) $A = \{n : n \in \mathbf{Z}$ और $n^2 \leq 4\}$ और $B = \{x : x \in \mathbf{R}$ और $x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

हल (i) $A = \{A,L,L,O,Y\}$, $B = \{L,O,Y,A,L\}$. तो A और B समान समुच्चय हैं क्योंकि एक समुच्चय के अवयवों की पुनरावृत्ति से समुच्चय नहीं बदलता है। इस प्रकार, $A = \{A, L, O, Y\} = B$.

(ii) $A = \{-2,-1,0,1,2,\}$, $B = \{1,2\}$. चूँकि $0 \in A$ और $0 \notin B$, A और B समान नहीं है।

उदाहरण 9 बतलाइए कि निम्नलिखित समुच्चयों में कौन परिमित हैं और कौन अपरिमित हैं।

(i) $\{x : x \in \mathbf{N}$ और $(x - 1)(x - 2) = 0\}$
(ii) $\{x : x \in \mathbf{N}$ और $x^2 = 4\}$
(iii) $\{x : x \in \mathbf{N}$ और $2x - 1 = 0\}$
(iv) $\{x : x \in \mathbf{N}$ और x अभाज्य है$\}$
(v) $\{x : x \in \mathbf{N}$ और x विषम है$\}$

हल (i) दिया समुच्चय $= \{1, 2\}$ है। अतः यह परिमित है।
(ii) दिया समुच्चय $= \{2\}$ है। अतः यह परिमित है।
(iii) दिया समुच्चय $= \phi$, है। अतः यह परिमित है।
(iv) दिया समुच्चय सभी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय है और क्योंकि अभाज्य संख्याओं का समुच्चय अनन्त है, अतः दिया समुच्चय अनन्त है।
(v) चूँकि विषम संख्याएँ अनन्त हैं, अतः यह समुच्चय अनन्त है।

प्रश्नावली 1.2

1. निम्नलिखित समुच्चयों में से कौन परिमित तथा कौन अपरिमित है :

(i) वर्ष के महीनों का समुच्चय।

(ii) $\{1, 2, 3, \ldots\}$

(iii) $\{1,2,3,\ldots,99,1000\}$

(iv) 100 से बड़े धन पूर्णांकों का समुच्चय।

(v) 99 से कम अभाज्य संख्याओं का समुच्चय।

2. बताइए कि निम्नलिखित समुच्चयों में से प्रत्येक में कौन परिमित हैं तथा कौन अपरिमित हैं?

(i) रेखाओं का समुच्चय जो x–अक्ष के समान्तर है।

(ii) अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों का समुच्चय।

(iii) संख्याओं का समुच्चय जो 5 की गुणक है।

(iv) पृथ्वी पर रहने वाले जानवरों का समुच्चय।

(v) समतल में मूलबिन्दु से होकर जाने वाले वृत्तों का समुच्चय।

3. निम्नलिखित में से कौन कौन रिक्त समुच्चय के उदाहरण हैं?

(i) 2 से भाज्य विषम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय।

(ii) सम अभाज्य संख्याओं का समुच्चय।

(iii) $\{x : x$ एक प्राकृत संख्या है, $x < 5$ और साथ–साथ $x > 7\}$

(iv) $\{y : y$ किन्हीं दो समान्तर रेखाओं का उभयनिष्ठ बिन्दु है। $\}$

4. निम्नलिखित में से बताइए कि A = B है या नहीं :

(i) $A = \{a, b, c, d,\}$ $\quad B = \{d, c, b, a\}$

(ii) $A = \{4, 8, 12, 16\}$ $\quad B = \{8, 4, 16, 18\}$

(iii) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $\quad B = \{x : x$ धन सम पूर्णांक है $\leq 10\}$

(iv) $A = \{x : x,$ 10 का गुणक है$\}$ $\quad B = \{10, 15, 20, 25, 30, \ldots\}$

5. क्या निम्नलिखित समुच्चय युग्म समान हैं? कारण बताइए।

(i) $A = \{2,3\}$, $\quad B = \{x : x, x^2 + 5x + 6 = 0$ का हल है$\}$

(ii) $A = \{x : x$ शब्द FOLLOW का एक अक्षर है।$\}$, $B = \{y : y$ शब्द WOLF का एक अक्षर है।$\}$

6. नीचे दिए गए समुच्चयों में से समान समुच्चय और तुल्य समुच्चय छाँटिए :

$A = \{0, a\}$ $\quad B = \{1, 2, 3, 4\}$

$C = \{4, 8, 12\}$ $\quad D = \{3, 1, 2, 4\}$

$E = \{1, 0\}$ $\quad F = \{8, 4, 12\}$

$G = \{1, 5, 7, 11\}$ $\quad H = \{a, b\}$.

1.6 उपसमुच्चय (Subsets)

समुच्चय S और T पर विचार करें, जहाँ S आपके विद्यालय के सभी विद्यार्थियों का समुच्चय निरूपित करता है और T आपकी कक्षा के सभी विद्यार्थियों का समुच्चय निरूपित करता है। हम पाते हैं कि T का प्रत्येक अवयव S का भी एक अवयव है। हम कहते हैं कि T, S का उपसमुच्चय है।

परिभाषा 5 यदि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव, समुच्चय B का भी एक अवयव है, तो A, B का उपसमुच्चय कहलाता है या A, B में अन्तर्विष्ट (contained in) है। हम इसे $A \subset B$ लिखते हैं।

यदि A का कम से कम एक अवयव B में नहीं है, तो A, B का उपसमुच्चय नहीं है। हम इसे $A \not\subset B$ लिखते हैं।

हम ध्यान दे सकते हैं कि A को B का उपसमुच्चय होने के लिए जो कुछ आवश्यक है वह यह है कि A का प्रत्येक अवयव B में है। यह संभव है कि B का प्रत्येक अवयव A में हो या नहीं भी हो। यदि ऐसा होता है कि B का प्रत्येक अवयव A में भी है, तो हम $B \subset A$ भी प्राप्त करेंगे। इस स्थिति में, A और B समान समुच्चय हैं क्योंकि हम

$A \subset B$ और $B \subset A$ से $A = B$ प्राप्त करते हैं।

परिभाषा से स्वतः स्पष्ट है कि प्रत्येक समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय है अर्थात् $A \subset A$, चूँकि रिक्त समुच्चय में कोई अवयव नहीं होता है, हम कह सकते हैं कि ϕ प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय होता है।

अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करते हैं।

(i) परिमेय संख्याओं का समुच्चय **Q,** वास्तविक संख्याओं के समुच्चय **R** का उपसमुच्चय है और हम $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. लिखते हैं।

(ii) यदि A, 56 के सभी भाजकों का समुच्चय है और B, 56 के सभी अभाज्य भाजकों का समुच्चय है तो B, A का उपसमुच्चय है, और हम $B \subset A$ लिखते हैं।

(iii) मान लीजिए $A = \{1, 3, 5\}$ और $B = \{x : x,$ 6 से कम एक विषम प्राकृत संख्या है$\}$, तो $A \subset B$ और $B \subset A$, अतः $A = B$ ।

(iv) मान लीजिए $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, तो A, B का उपसमुच्चय नहीं है तथा B, A का उपसमुच्चय नहीं है। जिसे हम $A \not\subset B$ और $B \not\subset A$ द्वारा लिखते हैं।

(v) आइए, हम समुच्चय {1,2} के सभी उपसमुच्चय लिखें। हम जानते हैं कि ϕ प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय होता है। इसलिए ϕ, समुच्चय {1,2} का उपसमुच्चय है। हम देखते हैं कि {1} और {2} और {1, 2} भी {1, 2} के उपसमुच्चय हैं। इस प्रकार, समुच्चय {1,2} के कुल चार उपसमुच्चय, नामतः ϕ, {1}, {2} और{1,2} हैं।

परिभाषा 6 मान लीजिए A और B दो समुच्चय हैं। यदि $A \subset B$ और $A \neq B$, तो A, B का उचित उपसमुच्चय *(proper subset)* कहते हैं और B को A का अधिसमुच्चय *(superset)* कहते हैं। उदाहरणतः, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ का उचित उपसमुच्चय है।

परिभाषा 7 यदि समुच्चय A में केवल एक अवयव हो तो हम इसे एकल समुच्चय *(singleton)* कहते। इस प्रकार, $\{a\}$ एक एकल समुच्चय है।

1.7 घात समुच्चय (Power Set)

अनुभाग 1.6 के उदाहरण (v) में समुच्चय $\{1, 2\}$ के सभी उपसमुच्चयों नामतः ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$ और $\{1, 2\}$प्राप्त किए। हम इन सभी उपसमुच्चय के समुच्चय को $\{1, 2\}$ का घात समुच्चय कहते हैं।

परिभाषा 8 समुच्चय A के सभी उपसमुच्चयों का समूह A का घात समुच्चय कहलाता है। इसे P(A) से निरूपित किया जाता है। P(A) का हर अवयव एक समुच्चय है।

अनुभाग 1.6 के उदाहरण (v) में, यदि $A = \{1, 2\}$, तो $P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$, यह भी ध्यान दीजिए, कि $n[P(A)] = 4 = 2^2$, व्यापक रूप से यह दिखाया जा सकता है कि यदि $n(A) = m$, तो $n[P(A)] = 2^m > m = n(A)$।

1.8 सार्वत्रिक समुच्चय (Universal Set)

समुच्चयों के किसी विशेष संदर्भ में, यदि हम U ऐसा समुच्चय पाते हैं ताकि सभी विचाराधीन समुच्चय U के उपसमुच्चय हों तो समुच्चय U को सार्वत्रिक समुच्चय कहते हैं। हम ध्यान देते हैं कि सार्वत्रिक समुच्चय अद्वितीय नहीं होता है।

उदाहरणतः सभी पूर्णांकों के समुच्चय **Z** के लिए, सार्वत्रिक समुच्चय परिमेय संख्याओं का समुच्चय **Q** या वास्तविक संख्याओं का समुच्चय **R** हो सकते हैं।

एक और उदाहरण, मानव जनसंख्या अध्ययन के संदर्भ में विश्व के सभी व्यक्तियों का समुच्चय सार्वत्रिक समुच्चय है।

उदाहरण 10 निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार कीजिए

ϕ, $A = \{1,3\}$, $B = \{1,5,9\}$, $C = \{1,3,5,7,9\}$

प्रत्येक समुच्चय युग्म के बीच सही प्रतीक $\subset$ या $\not\subset$ रखिए (i) ϕ — B, (ii) A — B, (iii) A — C, (iv) B — C.

हल (i) $\phi \subset B$ क्योंकि ϕ, प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय होता है।

(ii) $A \not\subset B$ क्योंकि $3 \in A$ और $3 \notin B$.

(iii) $A \subset C$ क्योंकि $1, 3 \in A$, जो C में भी हैं।

(iv) $B \subset C$ क्योंकि B का प्रत्येक अवयव C में भी है।

उदाहरण 11 मान लीजिए $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,3\}$ और $C = \{2,4\}$. सभी समुच्चय X ज्ञात कीजिए जिनके लिए (i) $X \subset B$ और $X \subset C$ (ii) $X \subset A$ और $X \not\subset B$.

हल (i) $X \subset B$ का अर्थ है कि X, B का उपसमुच्चय है तथा B के उपसमुच्चय हैं ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ और $\{1,2,3\}$. $X \subset C$ का अर्थ है कि X, C का उपसमुच्चय तथा C के सभी उपसमुच्चय ϕ, $\{2\}$, $\{4\}$ और $\{2,4\}$ हैं। हम पाते हैं कि $X \subset B$ और $X \subset C$ जिसका अर्थ है कि X, B और C दोनों का उपसमुच्चय है। अतः, $X = \phi$, $\{2\}$.

(ii) $X \subset A$, $X \not\subset B$ का अर्थ है कि X, A का उपसमुच्चय है परन्तु X, B का उपसमुच्चय नहीं है। इसलिए, $X = \{4\}$, $\{1,2,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,4\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$।

टिप्पणी एक समुच्चय के कुछ अवयव सहज रूप में ऐसे हो सकते हैं जो स्वयं समुच्चय हों। उदाहरणतः समुच्चय $\{1, \{2,3\}, 4\}$ का एक अवयव $\{2,3\}$ है जो एक समुच्चय है तथा इस समुच्चय के अवयव 1 तथा 4 भी हैं जो समुच्चय नहीं है।

उदाहरण 12 मान लीजिए कि A,B और C तीन समुच्चय हैं। यदि $A \in B$ और $B \subset C$ हों तो क्या यह सत्य है कि $A \subset C$? यदि नहीं तो एक उदाहरण दीजिए।

हल नहीं, मान लीजिए $A = \{1\}$, $B = C = \{\{1\}, 2\}$. यहाँ $A \in B$ क्योंकि $A = \{1\}$ और $B = C$ से प्राप्त होता है $B \subset C$, लेकिन $A \not\subset C$ क्योंकि $1 \in A$ और $1 \notin C$.

ध्यान दीजिए कि किसी समुच्चय का कोई अवयव उस समुच्चय का उपसमुच्चय कभी भी नहीं हो सकता है।

प्रश्नावली 1.3

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन से सत्य हैं? अपने उत्तर का औचित्य बताइए :
   (i) सभी बिल्लियों का समुच्चय, सभी जानवरों के समुच्चय में अन्तर्विष्ट है।
   (ii) सभी समद्विबाहु त्रिभुजों का समुच्चय, सभी समबाहु त्रिभुजों के समुच्चय में अन्तर्विष्ट है।
   (iii) सभी आयतों का समुच्चय, सभी वर्गों के समुच्चय में अन्तर्विष्ट है।
   (iv) समुच्चय $A = \{1\}$ और $B = \{\{1\}\}$ समान हैं।
   (v) समुच्चय $A = \{x : x$ शब्द "TITLE" का एक अक्षर है$\}$ और $B = \{x : x$ शब्द "LITTLE" का एक अक्षर है$\}$ समान हैं।

2. प्रतीकों $\subset$ या $\not\subset$ को रिक्त स्थानों में भरकर कथनों को शुद्ध कीजिए
   (i) $\{2,3,4\}$ — $\{1,2,3,4,5\}$.
   (ii) $\{a, b, c\}$ — $\{b, c, d\}$.
   (iii) $\{x : x$ आपके विद्यालय की XI कक्षा का एक विद्यार्थी है $\}$ — $\{x : x$ आपके विद्यालय का एक विद्यार्थी है $\}$

(iv) $\{x : x$ समतल में एक वृत्त है $\}$ — $\{x : x$ इकाई त्रिज्या का एक वृत्त है $\}$.

(v) $\{x : x$ समतल में एक त्रिभुज है $\}$ — $\{x : x$ समतल में एक आयत है $\}$.

(vi) $\{x : x$ समतल में एक समबाहु त्रिभुज है $\}$ — $\{x : x$ समतल में एक त्रिभुज है $\}$.

(vii) $\{x : x$ एक सम प्राकृत संख्या है $\}$ — $\{x : x$ एक पूर्णांक है $\}$.

3. परीक्षण कीजिए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य :

(i) $\{a, b\} \not\subset \{b, c, a\}$

(ii) $\{a, e\} \subset \{x : x$ अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है$\}$

(iii) $\{1, 3, 5\} \subset \{1, 3, 5\}$

(iv) $\{a\} \subset \{a, b, c\}$

(v) $\{a\} \in \{a, b, c\}$

(vi) $\{x : x$ एक सम प्राकृत संख्या है जो 6 की भाजक है$\} \subset \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है जो 36 की भाजक है$\}$.

4. मान लीजिए $A = \{1,2,\{3,4\},5\}$। निम्नलिखित कथनों में से कौन से असत्य हैं और क्यों?

(i) $\{3,4\} \subset A$ (ii) $\{3,4\} \in A$ (iii) $\{\{3,4\}\} \subset A$ (iv) $1 \in A$

(v) $1 \subset A$ (vi) $\{1,2,5\} \subset A$ (vii) $\{1,2,5\} \in A$ (viii) $\{1,2,3\} \subset A$

(ix) $\phi \in A$ (x) $\{\phi\} \subset A$.

5. निम्नलिखित समुच्चयों में कौन से समान हैं?

$A = \{x : x \in N, x < 3\}$, $B = \{1,2\}$, $C = \{3,1\}$

$D = \{x : x \in N, x$ विषम है, $x < 5\}$, $E = \{1,2,1\}$, $F = \{1,1,3\}$.

6. मान लीजिए $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,3\}$ और $C = \{2,4\}$. प्रतिबंधों के प्रत्येक युग्म को संतुष्ट करने वाले सभी समुच्चय X ज्ञात कीजिए :

(i) $X \subset B$ और $X \not\subset C$ (ii) $X \subset B, X \neq B$ और $X \not\subset C$ (iii) $X \subset A$, $X \subset B$ और $X \subset C$

7. मान लीजिए कि $A = \{\{1,2,3\}, \{4,5\}, \{6,7,8\}\}$. ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन सत्य हैं तथा कौन असत्य हैं।

(i) $1 \in A$ (ii) $\{1,2,3\} \subset A$ (iii) $\{6,7,8\} \in A$

(iv) $\{\{4,5\}\} \subset A$ (v) $\phi \in A$ (vi) $\phi \subset A$.

8. P(A) में कितने अवयव हैं यदि $A = \phi$?

9. मान लीजिए $A = \{\phi, \{\phi\}, 1, \{1,\phi\}, 7\}$. निम्नलिखित में से कौन सत्य हैं?

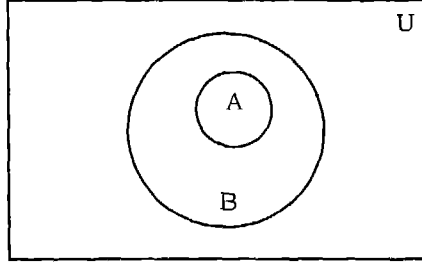
(i) $\phi \in A$ (ii) $\{\phi\} \in A$ (iii) $\{1\} \in A$

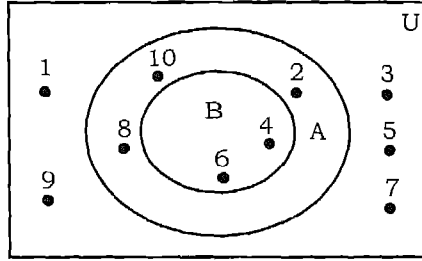
(iv) $\{7, \phi\} \subset A$ (v) $7 \subset A$ (vi) $\{7, \{1\}\} \not\subset A$

(vii) $\{\{7\}, \{1\}\} \not\subset A$ (viii) $\{\phi, \{\phi\}, \{1,\phi\}\} \subset A$ (ix) $\{\{\phi\}\} \subset A$.

10. मान लीजिए कि A,B,C तीन समुच्चय हैं। यदि $A \subset B$ और $B \in C$ तो क्या यह सत्य है कि $A \in C$? यदि नहीं तो एक उदाहरण दीजिए।

1.9 वेन आरेख (Venn Diagrams)

समुच्चयों के बीच अधिकांश संबंधों को आरेखों के द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। समतल में परिबद्ध क्षेत्र के रूप में समुच्चयों को प्रदर्शित करने वाली आकृतियाँ ब्रिटिश तर्कशास्त्री जॉन वेन (John Venn) (1834–1883 ई.) की स्मृति में वेन आरेख कहलाती हैं। सार्वत्रिक समुच्चय U को आयत के अन्तः क्षेत्र द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। अन्य समुच्चयों को वृत्तों या बन्द वक्रों के अन्तः क्षेत्र से प्रदर्शित किया जाता है।

आकृति 1.1

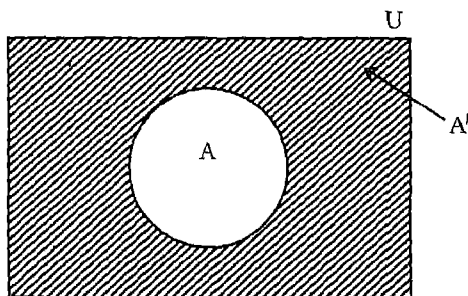
आकृति 1.1 समुच्चयों A और B, जहाँ $A \subset B$, को प्रदर्शित करने वाला वेन आरेख है।

आकृति 1.2

आकृति 1.2 में, $U = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ सार्वत्रिक समुच्चय है जिसके $A = \{2,4,6,8,10\}$ और $B = \{4,6\}$ उपसमुच्चय हैं। यह स्पष्ट है कि $B \subset A$, जब हम समुच्चय की संक्रियाओं की चर्चा करेंगे तब पाठक वेन आरेख का विस्तृत अनुपयोग देखेंगे।

1.10 समुच्चय का पूरक (Complement)

मान लीजिए कि सभी अभाज्य संख्याओं के समुच्चय का सार्वत्रिक समुच्चय U है तथा A, U का ऐसा उपसमुच्चय है जिसमें वे सभी अभाज्य संख्याएँ हैं जो 42 की भाजक नहीं है। इस प्रकार $A = \{x : x \in U$ और x, 42 का भाजक नहीं है$\}$. हम देखते हैं कि $2 \in U$ परन्तु

$2 \notin A$, क्योंकि 2, 42 का भाजक है। इसी प्रकार $3 \in U$ परन्तु $3 \notin A$, और $7 \in U$ परन्तु $7 \notin A$. अब 2,3 और 7, U के केवल ऐसे अवयव हैं जो A में नहीं हैं। इन तीन अभाज्य संख्याओं का समुच्चय अर्थात् समुच्चय {2,3,7} U के सापेक्ष A का पूरक कहलाता है, और A′ से निरूपित किया जाता है। इस प्रकार हम $A' = \{2,3,7\}$ पाते हैं। इस प्रकार, हम देखते हैं कि $A' = \{x : x \in U \text{ and } x \notin A\}$। इससे निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त होती है।

परिभाषा 9 मान लीजिए कि U एक सार्वत्रिक समुच्चय है और A, U का उपसमुच्चय है तो U के सापेक्ष A का पूरक U के उन अवयवों का समुच्चय है जो A के अवयव नहीं हैं। प्रतीकात्मक रूप में, हम U के सापेक्ष A के पूरक को A′ द्वारा निरूपित करते हैं। इस प्रकार $A' = \{x : x \in U$ और $x \notin A\}$. इसे वेन आरेख में निम्न प्रकार प्रदर्शित किया जा सकता है :

आकृति 1.3

आकृति 1.3 में छायांकित भाग A′ को प्रदर्शित करता है।

उदाहरण 13 मान लीजिए $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ और $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ है तो A′ ज्ञात कीजिए।

हल हम ध्यान देते हैं कि 2, 4, 6, 8, 10 ; U के वे अवयव हैं जो A में नहीं है। अतः $A' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

उदाहरण 14 मान लीजिए U एक सहशिक्षा विद्यालय के कक्षा XI के सभी विद्यार्थियों का सार्वत्रिक समुच्चय है और A, कक्षा XI की सभी लड़कियों का समुच्चय है। A′ ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि A सभी लड़कियों का समुच्चय है, अतः A′ कक्षा के सभी लड़कों का समुच्चय है।

1.11 समुच्चयों पर संक्रियाएँ

पूर्व की कक्षाओं में हम पढ़ चुके हैं कि सँख्याओं पर जोड़, घटाव, गुणा और भाग की संक्रियाएँ कैसे की जाती हैं। हमने इन संक्रियाओं के गुणधर्म यथा क्रम विनिमेय, साहचर्य, वंटन इत्यादि नियमों का भी अध्ययन किया। अब हम समुच्चय पर कुछ संक्रियाओं को परिभाषित करेंगे और

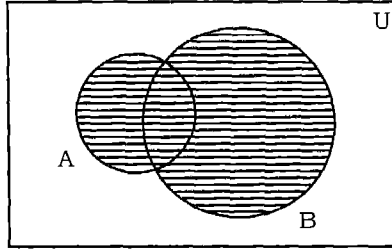
उनके गुणधर्मों का परीक्षण करेंगे। अतएव, हम सभी समुच्चयों को किसी सार्वत्रिक समुच्चय का उपसमुच्चय लेंगे।

(a) समुच्चयों का सम्मिलन (Union of Sets) मान लीजिए A और B कोई दो समुच्चय हैं। A और B का सम्मिलन वह समुच्चय है जिसमें A के सभी अवयवों के साथ–साथ B के भी अवयव हैं तथा उभयनिष्ठ अवयवों को केवल एक बार शामिल किया गया है। सम्मिलन को प्रतीक '$\cup$' से निरूपित किया जाता है।

इस प्रकार, हम दो समुच्चयों के सम्मिलन को निम्न प्रकार परिभाषित कर सकते हैं :

परिभाषा 10 दो समुच्चयों A और B का सम्मिलन समुच्चय C है जिसमें वे सभी अवयव है जो या तो A में हैं या B में हैं (दोनों में उभयिनिष्ठों को शामिल करते हुए)।

प्रतीकात्मक रूप से, हम $A \cup B = \{x : x \in A$ या $x \in B\}$ लिखते हैं तथा इसे हम 'A सम्मिलन B' पढ़ते हैं।

दो समुच्चयों के सम्मिलन, को आकृति 1.4 में दिखाए वेन आरेख से प्रदर्शित किया जा सकता है।

आकृति 1.4

आकृति 1.4 में छायांकित भाग $A \cup B$ को प्रदर्शित करता है।

उदाहरण 15 मान लीजिए कि $A = \{2, 4, 6, 8\}$ और $B = \{6, 8, 10, 12\}$, तो $A \cup B$ ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं कि $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.

ध्यान दें कि उभयनिष्ठ अवयव 6, 8 को $A \cup B$ लिखने में केवल एक ही बार लिया गया है।

उदाहरण 16 मान लीजिए $A = \{a, e, i, o, u\}$ और $B = \{a, i, u\}$. दिखाइए कि $A \cup B = A$.

हल हम पाते हैं कि $A \cup B = \{a, e, i, o, u\} = A$.

यह उदाहरण व्याख्या करता है कि समुच्चय A और उसके उपसमुच्चय B का सम्मिलन समुच्चय A स्वयं होता है, अर्थात् यदि $B \subset A$, तो $A \cup B = A$.

उदाहरण 17 मान लीजिए कि X = {राम, श्याम, अकबर} कक्षा XI के उन विद्यार्थियों का समुच्चय है जो विद्यालय की हाकी टीम में हैं तथा Y = {श्याम, डेविड, अशोक} कक्षा XI के उन विद्यार्थियों का समुच्चय है जो विद्यालय की फुटबाल टीम में हैं। $X \cup Y$ ज्ञात कीजिए और प्राप्त समुच्चय की व्याख्या कीजिए।

हल हम पाते हैं कि $X \cup Y$ = {राम, श्याम, अकबर, डेविड, अशोक}। यह कक्षा XI के उन विद्यार्थियों का समुच्चय है जो या तो हाकी टीम में या फुटबाल टीम में हैं।

उदाहरण 18 निम्नलिखित समुच्चयों के लिए उनका सम्मिलन ज्ञात कीजिए :

(i) $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{2,3,5\}$

(ii) $A = \{x : x \in \mathbf{Z}^+$ और $x^2 > 7\}$; $B = \{1,2,3\}$

(iii) $A = \{x : x \in \mathbf{Z}^+\}$; $B = \{x : x \in \mathbf{Z}$ और $x < 0\}$

(iv) $A = \{x : x \in \mathbf{N}$ और $1 < x \leq 4\}$; $B = \{x : x \in \mathbf{N}$ और $4 < x < 9\}$

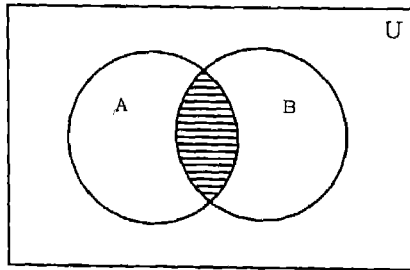
हल (i) $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$

(ii) $A = \{3,4,5,\ldots\}$, $B = \{1,2,3\}$. इसलिए, $A \cup B = \{1,2,3,4,5,\ldots\} = \mathbf{Z}^+$

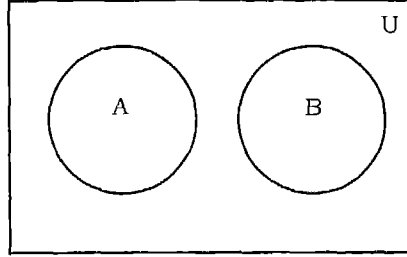
(iii) $A = \{1,2,3,\ldots\}$, B ={x : x एक ऋणात्मक पूर्णांक है }। इसलिए,
$A \cup B = \{x : x \in \mathbf{Z}, x \neq 0\}$

(iv) $A = \{2,3,4\}$, $B = \{5,6,7,8\}$। इसलिए, $A \cup B = \{2,3,4,5,6,7,8\}$.

(ख) समुच्चयों का सर्वनिष्ठ (Intersection of Sets) समुच्चयों A और B का सर्वनिष्ठ उन सभी अवयवों का समुच्चय है जो A और B दोनों में उभयनिष्ठ हैं। सर्वनिष्ठ को प्रतीक '$\cap$' से निरूपित किया जाता है। इस प्रकार, हम निम्नलिखित परिभाषा पाते हैं :

परिभाषा 11 दो समुच्चयों A और B का सर्वनिष्ठ उन सभी अवयवों का समुच्चय है जो A और B दोनों में हैं। इसे $A \cap B$ से निरूपित किया जाता है। इस प्रकार $A \cap B = \{x: x \in A$ और $x \in B\}$ जिसे A और B का उभयनिष्ठ समुच्चय पढ़ते हैं। दो समुच्चयों के सर्वनिष्ठ को

आकृति 1.5

आकृति 1.5 जैसी वेन आरेख से प्रदर्शित किया जाता है। छायांकित भाग $A \cap B$ को प्रदर्शित करता है।

यदि $A \cap B = \phi$, तो A और B को असंयुक्त समुच्चय (*disjoint*) कहते हैं। उदाहरणतः, मान लिजिए $A = \{2, 4, 6, 8\}$ और $B = \{1, 3, 5, 7\}$. तो A और B असंयुक्त समुच्चय हैं क्योंकि ऐसा कोई अवयव नहीं है जो A और B में उभयनिष्ठ हो। आकृति 1.6 में असंयुक्त समुच्चयों को वेन आरेख से प्रदर्शित किया गया है।

आकृति 1.6

उदाहरण 19 मान लीजिए $A = \{2, 4, 6, 8\}$ और $B = \{6, 8, 10, 12\}$ हैं, तो $A \cap B$ ज्ञात कीजिए।

हल हम देखतें है कि केवल अवयव 6,8 ऐसे हैं जो A और B दोनों में उभयनिष्ठ हैं। अतः $A \cap B = \{6,8\}$

उदाहरण 20 उदाहरण 17 के समुच्चयों X और Y पर विचार कीजिए। तथा $X \cap Y$ ज्ञात कीजिए।

हल हम देखते हैं कि केवल अवयव 'श्याम' दोनों में उभयनिष्ठ अवयव है। अतः, $X \cap Y$ = {श्याम}।

उदाहरण 21 मान लीजिए कि $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ और $B = \{2,3,5,7\}$ हैं तो $A \cap B$ ज्ञात कीजिए और सिद्ध कीजिए कि $A \cap B = B$.

हल हम पाते हैं कि $A \cap B = \{2,3,5,7\} = B$.

पुनः हम पाते हैं कि $B \subset A$, अतः $A \cap B = B$

उदाहरण 22 मान लीजिए कि $A = \{x : x \in \mathbf{Z}^+\}$; $B = \{x : x$, 3 का गुणक है, $x \in \mathbf{Z}\}$;

$C = \{x : x$ एक ऋणात्मक पूर्णांक है$\}$; $D = \{x : x$ एक विषम पूर्णांक है$\}$. निम्न ज्ञात कीजिए (i) $A \cap B$, (ii) $A \cap C$, (iii) $A \cap D$, (iv) $B \cap C$, (v) $B \cap D$, (vi) $C \cap D$.

हल $A = \{x : x$ एक धनात्मक पूर्णांक है $\}$, $B = \{3n : n \in \mathbf{Z}\}$;

(i) $A \cap B = \{3,6,9,12,\ldots\} = \{3n : n \in \mathbf{Z}^+\}$.

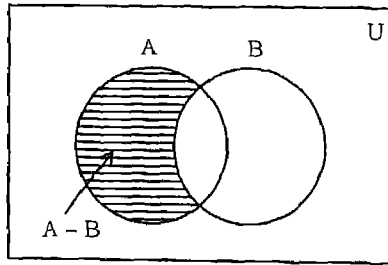
(ii) $A \cap C = \phi$

(iii) $A \cap D = \{1,3,5,7,\ldots\}$,

(iv) $B \cap C = \{-3,-6,-9,\ldots\} = \{3n : n$ एक ऋणात्मक पूर्णांक है $\}$,

(v) $B \cap D = \{\ldots,-15,-9,-3,3,9,15,\ldots\}$,

(vi) $C \cap D = \{-1,-3,-5,-7,\ldots\}$

(ग) **समुच्चयों का अन्तर (Difference of Sets)** समुच्चयों A और B का अन्तर, उन अवयवों का समुच्चय है जो A में हैं परन्तु B में नहीं हैं। प्रतीकात्मक रूप में, हम इसे $A - B$ द्वारा लिखते हैं और 'A अन्तर B' जैसा पढ़ते हैं। इस प्रकार, $A - B = \{x : x \in A$ और $x \notin B\}$ जो आकृति 1.7 में वेन आरेख द्वारा प्रदर्शित है। छायांकित भाग $A - B$ को प्रदर्शित करता है।

आकृति 1.7

उदाहरण 23 मान लीजिए $V = \{a,e,i,o,u\}$ और $B = \{a,i,k,u\}$। $V - B$ और $B - V$ ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं कि $V - B = \{e,o\}$, क्योंकि V के वे अवयव e और o हैं जो B में नही हैं। इसी प्रकार $B - V = \{k\}$.

उदाहरण 24 मान लीजिए कि $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ और $B = \{2,4,6,8\}$ है तो $A - B$ और $B - A$ ज्ञात कीजिए।

हल हम पातें हैं कि $A - B = \{1,3,5\}$ क्योंकि A के वे अवयव जो B में नहीं हैं, केवल 1,3,5 हैं। इसी प्रकार $B - A = \{8\}$

हम ध्यान देते हैं कि $A - B \neq B - A$.

सम्मिलन और सर्वनिष्ठ समुच्चय की संक्रियाएँ निम्नांकित दिये विभिन्न नियमों को संतुष्ट करती हैं :

(i) *साहचर्य नियम :*
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(ii) *क्रम विनिमेय नियम :*
$A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$

(iii) *वर्गसम (Idempotent) नियम :*
$A \cap A = A$; $A \cup A = A$

(iv) *तत्समक (Identity) नियम :*
$A \cap U = A$; $A \cup \phi = A$
$A \cap \phi = \phi$; $A \cup U = U$

(v) *बंटन नियम :*
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ये नियम वेन आरेखों की सहायता से सिद्ध किये जा सकते हैं।

समुच्चयों के पूरक निम्नलिखित नियमों को संतुष्ट करते हैं।

(i) *डिमोर्गन (De Morgan) के नियम :*
$(A \cap B)' = A' \cup B'$; $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(ii) *पूरक नियम :*
$A \cap A' = \phi$; $A \cup A' = U$
$\phi' = U$; $U' = \phi$

(iii) *घातकरण (Involution) नियम :*
$(A')' = A$

ये नियम वेन आरेखों के प्रयोग से सत्यापित किये जा सकते हैं।

उदाहरण 25 समुच्चय के गुणधर्मों का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए कि $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$.

हल बंटन नियम द्वारा, $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup (B \cap B') = A \cup \phi = A$.

उदाहरण 26 दिखाइए कि $A \cap B' = A - B$

हल $A - B = \{x : x \in A$ और $x \notin B\} = \{x : x \in A$ और $x \in B'\} = A \cap B'$.

उदाहरण 27 यदि $A \cap B' = \phi$, दिखाइए कि $A \subset B$.

हल
$$\begin{aligned} A &= (A \cap U) = A \cap (B \cup B') \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap B') \\ &= (A \cap B) \cup \phi = A \cap B. \end{aligned}$$

अतः $A \subset B$.

प्रश्नावली 1.4

1. निम्नलिखित समुच्चय युग्मों में से प्रत्येक के लिए, उनका सम्मिलन ज्ञात कीजिए :

   (i) $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{a, b, c\}$.

   (ii) $A = \{1,3,5\}$, $B = \{1,2,3\}$.

   (iii) $A = \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है और 3 का गुणक है$\}$
   $B = \{x : x$, 6 से कम एक प्राकृत संख्या है$\}$

   (iv) $A = \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है और $1 < x \leq 6\}$
   $B = \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है और $6 < x \leq 10\}$

   (v) $A = \{1,2,3\}$, और $B = \phi$.

2. मान लीजिए कि $A = \{a, b\}$ और $B = \{a, b, c\}$, क्या $A \subset B$ है? तथा $A \cup B$ क्या है?

3. यदि A और B दो ऐसे समुच्चय हैं कि $A \subset B$ तो $A \cup B$ क्या है?

4. यदि $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$, $C = \{5,6,7,8\}$ और $D = \{7,8,9,10\}$ है तो निम्न ज्ञात कीजिए :

   (i) $A \cup B$ (ii) $A \cup C$ (iii) $B \cup C$
   (iv) $B \cup D$ (v) $A \cup B \cup C$ (vi) $A \cup B \cup D$
   (vii) $B \cup C \cup D$.

5. प्रश्न 1 के भाग (i), (ii), (iii) में से प्रत्येक समुच्चय युग्म का सर्वनिष्ठ ज्ञात कीजिए।

6. यदि $A = \{3,5,7,9,11\}$ और $B = \{7,9,11,13\}$; $C = \{11,13,15\}$, $D = \{15,17\}$ है तो निम्न ज्ञात कीजिए।

   (i) $A \cap B$ (ii) $B \cap C$ (iii) $A \cap C \cap D$
   (iv) $A \cap C$ (v) $B \cap D$ (vi) $A \cap (B \cap C)$
   (vii) $A \cap D$ (viii) $A \cap (B \cup D)$ (ix) $(A \cap B) \cap (B \cup C)$
   (x) $(A \cup D) \cap (B \cup C)$

7. यदि $A = \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है$\}$, $B = \{x : x$ एक सम प्राकृत संख्या है$\}$, $C = \{x : x$ एक विषम प्राकृत संख्या है$\}$, $D = \{x : x$ एक अभाज्य संख्या है$\}$, तो ज्ञात कीजिए

   (i) $A \cap B$ (ii) $A \cap C$ (iii) $A \cap D$
   (iv) $B \cap C$ (v) $B \cap D$ (vi) $C \cap D$.

8. निम्नलिखित समुच्चय युग्मों में से कौन से असंयुक्त हैं?

   (i) $\{1,2,3,4\}$ और $\{x : x$ एक प्राकृत संख्या है और $4 \leq x \leq 6\}$

   (ii) $\{a,e,i,o,u\}$ और $\{c,d,e,f\}$

   (iii) $\{x : x$ एक सम पूर्णांक है$\}$ और $\{x : x$ एक विषम पूर्णांक है$\}$

9. यदि $A = \{3, 6, 12, 15, 18, 21\}$, $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$ और $D = \{5, 10, 15, 20\}$ है तो निम्न ज्ञात कीजिए।

(i) $A - B$	(ii) $A - C$	(iii) $A - D$
(iv) $B - A$	(v) $C - A$	(vi) $D - A$
(vii) $B - C$	(viii) $B - D$	(ix) $C - B$
(*x*) $D - B$	(xi) $C - D$	(xii) $D - C$

10. यदि $X = \{a, b, c, d\}$ और $Y = \{f, b, d, g\}$ है तो ज्ञात कीजिए
(i) $X - Y$, (ii) $Y - X$, (iii) $X \cap Y$.

11. यदि **R** वास्तविक संख्याओं का समुच्चय और **Q** परिमेय संख्याओं का समुच्चय है, तो $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ क्या है?

12. बताइए कि निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक सत्य हैं या असत्य ? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

(i) $\{2,3,4,5\}$ और $\{3,6\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

(ii) $\{a,e,\text{i},\text{o},\text{u}\}$ और $\{a,b,c,d\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

(iii) $\{2,6,10,14\}$ और $\{3,7,11,15\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

(iv) $\{2,6,10\}$ और $\{3,7,11\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

13. मान लीजिए कि $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6,8\}$ और $C = \{3,4,5,6\}$, तो निम्न ज्ञात कीजिए :

(i) A'	(ii) B'	(iii) $(A \cap C)'$
(iv) $(A \cup B)'$	(v) $(A')'$	(vi) $(B - C)'$.

14. यदि $U = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, निम्नलिखित समुच्चयों के पूरक ज्ञात कीजिए।
(i) $A = \{a,b,c\}$ (ii) $B = \{d,e,f,g\}$ (iii) $C = \{a,c,e,g\}$ (iv) $D = \{f,g,h,a\}$

15. प्राकृत संख्याओं के समुच्चय को सार्वत्रिक समुच्चय लेते हुए, निम्नलिखित समुच्चयों के पूरक लिखिए।

(i) $\{x : x \in \mathbf{N}$ और x सम है$\}$

(ii) $\{x : x \in \mathbf{N}$ और x विषम है$\}$

(iii) $\{x : x \in \mathbf{N}$ और $x = 3n,\ n \in \mathbf{N}\}$

(iv) $\{x : x$ एक अभाज्य संख्या है$\}$

(v) $\{x : x \in \mathbf{N}$ और x एक पूर्ण वर्ग है$\}$

(vi) $\{x : x \in \mathbf{N}$ और x एक पूर्ण घन है$\}$

(vii) $\{x : x \in \mathbf{N}$ और $x + 5 = 8\}$

(viii) $\{x : x \in \mathbf{N}$ और $2x + 5 = 9\}$

(ix) $\{x : x \in \mathbf{N}$ और $x \geq 7\}$

(*x*) $\{x : x \in \mathbf{N}$ और x, 3 और 5 से भाज्य है$\}$

16. यदि $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A = \{2,4,6,8\}$ और $B = \{2,3,5,7\}$ है, तो निम्न सत्यापित कीजिए।

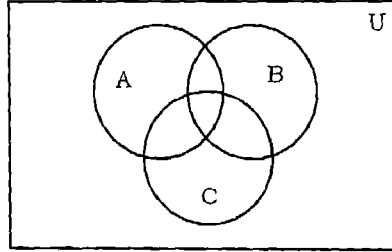
(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

17. दिखाइए कि $(A \cup B) - (A \cap B) = (A-B) \cup (B-A)$.
(संकेत : $X - Y = X \cap Y'$ और डिमोर्गन नियमों का प्रयोग कीजिए)
यह अन्तर सममित अन्तर *(Symmetric Difference)* भी कहलाता है।

18. यदि $A' \cup B = U$, दिखाइए कि $A \subset B$.

19. यदि $B' \subset A'$, दिखाइए कि $A \subset B$.

20. निम्नलिखित समुच्चयों को वेन आरेख 1.8 में छायांकित कीजिए।

(i) $A' \cap (B \cup C)$ (ii) $A' \cap (C - B)$

आकृति 1.8

21. समुच्चयों A, B, C के लिए, समुच्चयों के गुणधर्मों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए।

(i) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(ii) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$ (संकेत : $X - Y = X \cap Y'$)

(iii) $(A \cup B) - A = B - A$

(iv) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

(v) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

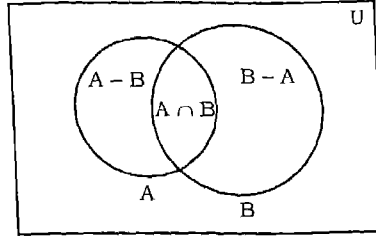
1.12 समुच्चयों के अनुप्रयोग

मान लीजिए A, B परिमित समुच्चय हैं। यदि $A \cap B = \phi$, तो

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \quad (1)$$

$A \cup B$ के अवयव या तो A में है या B में है परन्तु दोनों में नहीं हैं क्योंकि $A \cap B = \phi$ इसलिए तत्काल अनुसरित परिणाम (1) प्राप्त होता है।

व्यापक रूप से यदि A, B परिमित समुच्चय हों, तो

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (2)$$

आकृति 1.9

ध्यान दीजिए कि समुच्चय $A - B$, $A \cap B$ और $B - A$ असंयुक्त हैं और उनका सम्मिलन $A \cup B$ है (आकृति 1.9)। इसलिए

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A-B) + n(A \cap B) + n(B-A) \\ &= n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) + n(A \cap B) - n(A \cap B) \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \end{aligned}$$

जो (2) को प्रमाणित करता है।

यदि A, B और C परिमित समुच्चय हैं, तो

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) \\ &\quad - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned} \qquad (3)$$

अब, वास्तव में हम पाते हैं कि

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B \cup C) - n(A \cap (B \cup C)) \qquad [(2) \text{ से}] \\ &= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap (B \cup C)) \\ &\qquad [(2) \text{ से}] \end{aligned}$$

चूँकि $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ अत:

$$\begin{aligned} n[(A \cap (B \cup C)] &= n(A \cap B) + n(A \cap C) - n[(A \cap B \cap A \cap C)] \\ &= n(A \cap B) + n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

इसलिए

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) \\ &\quad - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

इससे (3) सिद्ध होता है।

उदाहरण 28 यदि X और Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि $n(X \cup Y) = 50$, $n(X) = 28$ और $n(Y) = 32$, $n(X \cap Y)$ ज्ञात कीजिए।

हल सूत्र

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y),$$

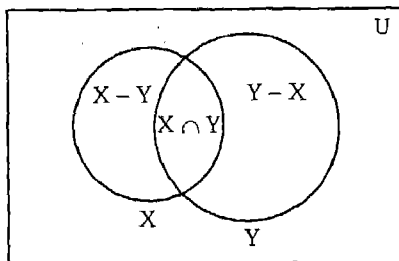
के प्रयोग से हम पाते हैं कि

$$n(X \cap Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cup Y)$$
$$= 28 + 32 - 50 = 10$$

विकल्पतः, यदि $n(X \cap Y) = k$, तो

$n(X - Y) = 28 - k$, $n(Y - X) = 32 - k$. (वेन आरेख 1.10 से)

अतः $50 = n(X \cup Y) = (28 - k) + k + (32 - k)$.

इसलिए, $k = 10$.

आकृति 1.10

उदाहरण 29 एक विद्यालय में 20 अध्यापक हैं जो गणित या भौतिकी पढ़ाते हैं। उनमें से 12 गणित पढ़ाते है और 4 भौतिकी और गणित पढ़ाते हैं। कितने भौतिकी पढ़ाते हैं?

हल मान लीजिए कि M उन अध्यापकों का समुच्चय निरूपित करता है जो गणित पढ़ाते हैं और P उन अध्यापकों का समुच्चय निरूपित करता है जो भौतिकी पढ़ाते हैं। हमें दिया है कि $n(M \cup P) = 20$, $n(M) = 12$, $n(M \cap P) = 4$.

इसलिए $n(P) = n(M \cup P) - n(M) + n(M \cap P) = 20 - 12 + 4 = 12$.

अतः 12 अध्यापक भौतिकी पढ़ाते हैं।

उदाहरण 30 50 व्यक्तियों के समूह में, 35 हिन्दी बोलते हैं, 25 अंग्रेजी और हिन्दी दोनों बोलते हैं और सभी व्यक्ति दोनों भाषाओं में से कम से कम एक भाषा बोलते हैं। कितने व्यक्ति केवल अंग्रेजी बोलते हैं तथा हिन्दी नहीं? कितने व्यक्ति अंग्रेजी बोलते हैं?

हल मान लीजिए H हिन्दी बोलने वाले व्यक्तियों का समुच्चय तथा E अंग्रेजी बोलने वाले व्यक्तियों के समुच्चय को निरूपित करता है। हमें दिया हुआ है कि $n(H \cup E) = 50$, $n(H) = 35$, $n(H \cap E) = 25$.

अब $n(H \cup E) = n(H) + n(E - H)$

इसलिए $50 = 35 + n(E - H)$

अर्थात् $n(E - H) = 15$

इस प्रकार, उन व्यक्तियों की संख्या जो अंग्रेजी बोलते हैं परन्तु हिन्दी नहीं =15.

तथा $n(H \cup E) = n(H) + n(E) - n(H \cap E)$

अर्थात् $50 = 35 + n(E) - 25$

इसलिए $n(E) = 40$

इस प्रकार, उन व्यक्तियों की संख्या जो अंग्रेजी बोलते हैं = 40.

उदाहरण 31 एक सर्वेक्षण में, एक स्कूल के 400 विद्यार्थियों में, 100 विद्यार्थी सेब का रस पीने वाले, और 150 विद्यार्थी संतरे का रस पीने वाले, तथा 75 विद्यार्थी सेब तथा संतरा दोनों का रस पीने वाले पाये गये। ज्ञात कीजिए कितने विद्यार्थी न तो सेब का रस पीते हैं और न संतरे का ही?

हल मान लीजिए U सर्वेक्षण किए विद्यार्थियों के समूह को निरूपित करता है, A सेब के रस पीने वाले विद्यार्थियों का समुच्चय तथा B संतरे के रस पीने वाले विद्यार्थियों के समुच्चय को निरूपित करता है।

तो $n(U) = 400$, $n(A) = 100$, $n(B) = 150$ और $n(A \cap B) = 75$

हम $n(A' \cap B')$ ज्ञात करना चाहते हैं।

अब
$$
\begin{aligned}
n(A' \cap B') &= n(A \cup B)' \\
&= n(U) - n(A \cup B) \\
&= n(U) - n(A) - n(B) + n(A \cap B) \\
&= 400 - 100 - 150 + 75 = 225.
\end{aligned}
$$

उदाहरण 32 रसायन विज्ञान की कक्षा में 20 विद्यार्थी तथा भौतिकी की कक्षा में 30 विद्यार्थी हैं। निम्नलिखित स्थितियों में उन विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए जो या तो भौतिकी की कक्षा में हैं या रसायन विज्ञान की कक्षा में :

(i) दोनों कक्षाएँ एक ही घण्टे में मिलती हैं।

(ii) दोनों कक्षाएँ भिन्न–भिन्न घण्टों में मिलती हैं और 10 विद्यार्थी दोनों पाठ्यक्रमों में पंजीकृत हैं।

हल मान लीजिए C रसायन विज्ञान की कक्षा के विद्यार्थियों का समुच्चय और P भौतिकी कक्षा के विद्यार्थियों का समुच्चय है। दिया हुआ है कि $n(C) = 20$, $n(P) = 30$. हमें $n(C \cup P)$ ज्ञात करना है

(i) दोनों कक्षाएँ एक ही घण्टे में मिलती है, का अर्थ है कि
$C \cap P = \phi$, इसलिए $n(C \cup P) = n(C) + n(P) = 50$.

(ii) इस स्थिति में, $n(C \cap P) = 10$.

इसलिए $n(C \cup P) = n(C) + n(P) - n(C \cap P) = 50 - 10 = 40$

उदाहरण 33 एक कक्षा के 25 विद्यार्थियों में से 12 ने गणित लिया है, 8 ने गणित लिया है लेकिन जीवविज्ञान नहीं। उन विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए जिन्होनें गणित और जीवविज्ञान लिया है तथा उन विद्यार्थियों की भी संख्या बताइए जिन्होंने जीवविज्ञान लिया है परन्तु गणित नही। प्रत्येक विद्यार्थी ने या तो गणित या जीवविज्ञान या दोनों लिया है।

हल मान लीजिए M उन विद्यार्थियों का समुच्चय है जिन्होंने गणित लिया है तथा B उन विद्याार्थियों का समुच्चय है जिन्होंने जीवविज्ञान लिया है।

हमें दिया हुआ है कि $n(M) = 12$, $n(M - B) = 8$, $n(M \cup B) = 25$.

अब $n(M \cup B) = n(M) + n(B - M)$.

इसलिए $25 = 12 + n(B - M)$.

अतः $n(B - M) = 13$.

इस प्रकार, उन विद्यार्थियों की संख्या जिन्होंने जीवविज्ञान लिया है लेकिन गणित नहीं = 13.

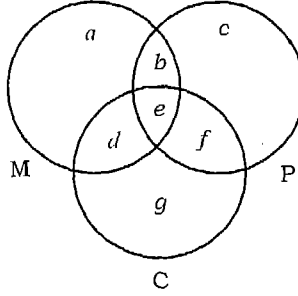
तथा $n(M \cup B) = n(M - B) + n(M \cap B) + n(B - M)$

इसलिए $25 = 8 + n(M \cap B) + 13$

अर्थात् $n(M \cap B) = 4$.

इस प्रकार, उन विद्यार्थियों की संख्या जिन्होंने गणित और जीवविज्ञान दोनों लिए हैं = 4.

उदाहरण 34 25 विद्यार्थियों के सर्वेक्षण से यह पाया गया कि 15 ने गणित लिया है, 12 ने भौतिकी ली है और 11 ने रसायन विज्ञान लिया है। 5 ने गणित और रसायन लिए, 9 ने गणित और भौतिकी लिए, 4 ने भौतिकी और रसायन लिए तथा 3 ने सभी तीनों विषय लिए थे। उन विद्यार्थियों की संख्या बताइए जिन्होंने (i) केवल रसायन विज्ञान (ii) केवल गणित (iii) केवल भौतिकी (iv) भौतिकी और रसायन विज्ञान लेकिन गणित नहीं (v) गणित और भौतिकी लेकिन रसायन विज्ञान नहीं (vi) केवल एक विषय (vii) तीन में से कम से कम एक विषय (viii) तीनों विषयों में से कोई नहीं, लिए।

हल मान लीजिए M उन विद्यार्थियों का समुच्चय है जिन्होंने गणित लिया है, P उन विद्यार्थियों का समुच्चय है जिन्होंने भौतिकी लिया है और C उन विद्यार्थियों का समुच्चय है जिन्होंने रसायन विज्ञान लिया है। वेन आरेख 1.11 पर विचार कीजिए।

आकृति 1.11

आकृति 1.11 में, a, b, c, d, e, f, g सम्बन्धित क्षेत्रों में अवयवों की संख्या निरूपित करते हैं। दिये आंकड़ों से, हम पाते हैं

$$n(\mathrm{M}) = a + b + d + e = 15$$
$$n(\mathrm{P}) = b + c + e + f = 12$$
$$n(\mathrm{C}) = d + e + f + g = 11$$
$$n(\mathrm{M} \cap \mathrm{P}) = b + e = 9$$
$$n(\mathrm{M} \cap \mathrm{C}) = d + e = 5$$
$$n(\mathrm{P} \cap \mathrm{C}) = e + f = 4$$
$$n(\mathrm{M} \cap \mathrm{P} \cap \mathrm{C}) = e = 3.$$

इसलिए, $b = 6,\ d = 2,\ f = 1,\ a = 4,\ g = 5,\ c = 2.$

इस प्रकार, विभिन्न स्थितियों में विद्यार्थियों की संख्या निम्नवत है :

(i) $g = 5$ (ii) $a = 4$ (iii) $c = 2$

(iv) $f = 1$ (v) $b = 6$ (vi) $g + a + c = 11$

(vii) $a + b + c + d + e + f + g = 23$

(viii) $25 - (a + b + c + d + e + f + g) = 25 - 23 = 2.$

प्रश्नावली 1.5

1. यदि X,Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि $n(\mathrm{X}) = 17$, $n(\mathrm{Y}) = 23$ और $n(\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}) = 38$, $n(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y})$ ज्ञात कीजिए।

2. यदि X और Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि $\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}$ में 18 अवयव, X में 8 अवयव और Y में 15 अवयव हैं, तो $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}$ में कितने अवयव हैं ?

3. 400 व्यक्तियों के समूह में, 250 हिन्दी बोल सकते हैं और 200 अंग्रेजी बोल सकते हैं। कितने व्यक्ति हिन्दी और अंग्रेजी दोनों बोल सकते हैं?

4. यदि S और T दो समुच्चय ऐसे हैं कि S में 21 अवयव, T में 32 अवयव और $S \cap T$ में 11 अवयव हैं तो $S \cup T$ में कितने अवयव हैं?

5. यदि X और Y दो समुच्चय ऐसे हैं कि X में 40 अवयव, $X \cup Y$ में 60 अवयव और $X \cap Y$ में 10 अवयव हैं तो Y में कितने अवयव हैं?

6. 70 व्यक्तियों के समूह में, 37 कॉफी पसंद करते हैं, 52 चाय पसंद करते हैं और प्रत्येक व्यक्ति दोनों पेयों में से कम से कम एक पसंद करता है। कितने कॉफी और चाय दोनों पसंद करते हैं?

7. 65 व्यक्तियों के समूह में, 40 क्रिकेट पसंद करते हैं, 10 क्रिकेट और टेनिस दोनों पसंद करते हैं। कितने केवल टेनिस पसंद करते हैं क्रिकेट नहीं? कितने टेनिस पसंद करते हैं?

8. एक समिति में 50 फ्रेन्च बोलते हैं, 20 स्पेनिश बोलते हैं और 10 स्पेनिश और फ्रेन्च दोनों बोलते हैं। कितने दोनों भाषाओं में से कम से कम एक बोलते हैं?

9. एक व्यक्तियों के समूह में, 50 अंग्रेजी और हिन्दी दोनों बोलते हैं, और 30 अंग्रेजी बोलते हैं हिन्दी नहीं। सभी व्यक्ति दोनों भाषाओं में से कम से कम एक भाषा बोलते हैं। कितने व्यक्ति अंग्रेजी बोलते हैं?

10. एक सर्वेक्षण से यह पाया गया कि 21 व्यक्तियों ने उत्पाद A पसंद किया, 26 ने उत्पाद B पसंद किया, और 29 ने उत्पाद C पसंद किया। यदि 14 व्यक्तियों ने उत्पादों A और B को पसंद किया, 12 व्यक्तियों ने उत्पादों C और A को पसंद किया, 14 व्यक्तियों ने उत्पादों B और C को पसंद किया और 8 ने सभी तीनों उत्पादों को पसंद किया। बताइए कितने व्यक्तियों ने केवल उत्पाद C पसंद किया।

11. 100 विद्यार्थियों के सर्वेक्षण से विभिन्न भाषाओं का अध्ययन करने वाले विद्यार्थियों की संख्या इस प्रकार पायी गई : केवल अंग्रेजी 18; अंग्रेजी लेकिन हिन्दी नहीं 23; अंग्रेजी और संस्कृत 8; अंग्रेजी 26; संस्कृत 48; संस्कृत और हिन्दी 8; कोई भाषा नहीं 24, तो ज्ञात कीजिए :
   (i) हिन्दी अध्ययन करने वाले कितने विद्यार्थी थे?
   (ii) अंग्रेजी और हिन्दी का अध्ययन करने वाले कितने विद्यार्थी थे?

12. 100 व्यक्तियों के सर्वेक्षण में यह पाया गया कि 28 पत्रिका A पढ़ते हैं, 30 पत्रिका B पढ़ते हैं, 42 पत्रिका C पढ़ते हैं, 8 पत्रिकायें A और B पढ़ते हैं, 10 पत्रिकायें A और C पढ़ते हैं, 5 पत्रिकायें B और C पढ़ते हैं और 3 सभी तीनों पत्रिकायें पढ़ते हैं। ज्ञात कीजिए:
   (i) कितने तीनों पत्रिकाओं में से कोई भी नहीं पढ़ते हैं?
   (ii) कितने केवल C पत्रिका पढ़ते हैं?

विविध उदाहरण

उदाहरण 35 दिखाइए, कि "CATARACT" के वर्णविन्यास के अक्षरों का समुच्चय और "TRACT" के वर्णविन्यास के अक्षरों का समुच्चय समान हैं।

हल मान लीजिए कि X "CATARACT" के अक्षरों का समुच्चय है। तब X = {C,A,T,A,R,A,C,T} = {C,A,T,R}। मान लीजिए Y "TRACT" के अक्षरों का समुच्चय है। तब Y = {T,R,A,C,T} = {T,R,A,C}। चूँकि X का प्रत्येक अवयव Y में है और Y का प्रत्येक अवयव X में है, अतः X = Y.

उदाहरण 36 समुच्चय $\{-1,0,1\}$ के सभी उपसमुच्चय बताइए।

हल मान लीजिए कि $A = \{-1,0,1\}$. A का वह उपसमुच्चय जिसमें कोई अवयव न हो रिक्त समुच्चय ϕ है। A के एक अवयव वाले उपसमुच्चय $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$हैं। A के दो अवयव वाले उप समुच्चय $\{-1,0\}$, $\{-1,1\}$, $\{0,1\}$ हैं। A के तीन अवयव वाला उपसमुच्चय A स्वयं ही है। इस प्रकार, A के उपसमुच्चय ϕ, $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{-1,0\}$, $\{-1,1\}$, $\{0,1\}$, $\{-1,0,1\}$ हैं।

उदाहरण 37 सिद्ध कीजिए कि $A \cup B = A \cap B$ का अर्थ है $A = B$.

हल अब $a \in A$ का अर्थ है $a \in A \cup B$। चूँकि $A \cup B = A \cap B$, $a \in A \cap B$. इस प्रकार, $a \in B$. इसलिए, $A \subset B$. इसी प्रकार, $b \in B$ का अर्थ है $b \in A \cup B$, चूँकि $A \cup B = A \cap B$, $b \in A \cap B$. इस प्रकार $b \in A$. इसलिए, $B \subset A$. इस प्रकार, $A = B$.

उदाहरण 38 मान लीजिए दो समुच्चय A, B है तो सिद्ध कीजिए कि $(A - B) \cup B = A$ यदि और केवल यदि $B \subset A$.

हल मान लीजिए $A = (A - B) \cup B$. तब $A = (A \cap B') \cup B$. दोनों पक्षों का पूरक लेने पर, $A' = (A' \cup B) \cap B' = (A' \cap B') \cup (B \cap B') = (A' \cap B')$।

इस प्रकार, $A' \subset B'$, इसलिए, $B \subset A$.

विलोमतः, मान लीजिए $B \subset A$. तब

$(A - B) \cup B = (A \cap B') \cup B = B \cup (A \cap B') = (B \cup A) \cap (B \cup B') = A \cap U = A$,

क्योंकि $B \subset A$, $A \cup B = A$.

उदाहरण 39 सिद्ध कीजिए, यदि $A \cup B = C$ और $A \cap B = \phi$, तब $A = C - B$.

हल हमें ज्ञात है कि

$$
\begin{aligned}
C - B = (A \cup B) - B &= (A \cup B) \cap B' \\
&= B' \cap (A \cup B) \\
&= (B' \cap A) \cup (B' \cap B) \\
&= (B' \cap A) \cup \phi \\
&= B' \cap A = A \cap B' \\
&= A - B = A \text{ (क्योंकि } A \cap B = \phi).
\end{aligned}
$$

उदाहरण 40 समुच्चयों A, B के लिए सिद्ध कीजिए : $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

हल मान लीजिए $X \in P(A \cap B)$। तब $X \subset A \cap B$, अतः $X \subset A$ और $X \subset B$। इसलिए, $X \in P(A)$, $X \in P(B)$ जिसका अर्थ है कि $X \in P(A) \cap P(B)$. इससे

$$P(A \cap B) \subset P(A) \cap P(B). \text{ प्राप्त होता है}$$

मान लीजिए $Y \in P(A) \cap P(B)$ तब $Y \in P(A)$ और $Y \in P(B)$. अतः $Y \subset A$ और $Y \subset B$. इसलिए, $Y \subset A \cap B$ जिसका अर्थ है कि $Y \in P(A \cap B)$, इससे प्राप्त होता है कि

$$P(A) \cap P(B) \subset P(A \cap B).$$

इसप्रकार $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

उदाहरण 41 एक बाजार अनुसंधान समूह ने 1000 उपभोक्ताओं का सर्वेक्षण किया और सूचित किया कि 720 उपभोक्ताओं ने उत्पाद A पसंद किया और 450 उपभोक्ताओं ने उत्पाद B पसंद किया। उपभोक्ताओं की कम से कम क्या संख्या है जिन्होंने दोनों उत्पादों को पसंद किया?

हल मान लीजिए सर्वेक्षित उपभोक्ताओं का समुच्चय U है, S उन उपभोक्ताओं का समुच्चय है जिन्होंने उत्पाद A पसंद किया और T उन उपभोक्ताओं का समुच्चय है जिन्होंने उत्पाद B पसंद किया। दिया हुआ है कि $n(U) = 1000$, $n(S) = 720$, $n(T) = 450$.

इस प्रकार $n(S \cup T) = n(S) + n(T) - n(S \cap T) = 1170 - n(S \cap T)$

इसलिए $n(S \cap T)$ कम से कम है जब कि $n(S \cup T)$ अधिकतम हैं।

लेकिन $S \cup T \subset U$ का अर्थ है कि $n(S \cup T) \le n(U) = 1000$.

अतः $n(S \cup T)$ का अधिकतम मान $= 1000$ तथा $n(S \cap T)$ का न्यूनतम मान $= 170$.

अतः कम से कम उन उपभोक्ताओं की संख्या 170 है जिन्होंने दोनों उत्पादों को पसंद किया।

उदारहण 42 500 कार मालिकों से जानकारी ली गई, तो पाया गया कि 400 कार A के मालिक थे और 200 कार B के; 50 दोनों कारों के मालिक थे। क्या यह आंकड़े सत्य हैं?

हल मान लीजिए जानकारी लिए जाने वाले मालिकों का समुच्चय U है, M उन व्यक्तियों का समुच्चय है जो कार A के मालिक हैं और S उन व्यक्तियों का समुच्चय है जो कार B के मालिक हैं।

दिया हुआ है कि $n(U) = 500$, $n(M) = 400$, $n(S) = 200$ and $n(S \cap M) = 50$

तब $n(S \cup M) = n(S) + n(M) - n(S \cap M) = 550$.

परन्तु $S \cup M \subset U$ का अर्थ है $n(S \cup M) \le n(U) = 500$.

यह एक विरोधाभास है इसलिए, दिये गए आंकड़े असत्य हैं।

उदाहरण 43 एक कालिज ने फुटबाल में 38 पदक, बास्केटबाल में 15 पदक और क्रिकेट में 20 पदक पुरष्कृत किए। यदि ये पदक कुल 58 मनुष्यों को दिये गए और केवल तीन व्यक्तियों को तीनों खेलों में पदक मिले, बताइए कितनों ने तीन खेलों में से ठीक दो में पदक प्राप्त किए?

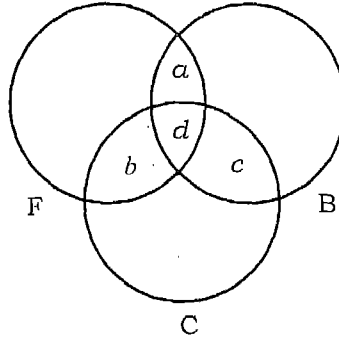
हल मान लीजिए F, B, तथा C उन व्यक्तियों के समुच्चयों को निरूपित करते हैं जिन्होंने क्रमशः फुटबाल, बास्केटबाल और क्रिकेट में पदक प्राप्त किए।

तब $n(\mathrm{F}) = 38$, $n(\mathrm{B}) = 15$, $n(\mathrm{C}) = 20$, $n(\mathrm{F} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = 58$ तथा $n(\mathrm{F} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = 3$.

इसलिए, $n(\mathrm{F} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = n(\mathrm{F}) + n(\mathrm{B}) + n(\mathrm{C}) - n(\mathrm{F} \cap \mathrm{B}) - n(\mathrm{F} \cap \mathrm{C}) - n(\mathrm{B} \cap \mathrm{C})$

$$+ n(\mathrm{F} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C})$$

का अर्थ है $n(\mathrm{F} \cap \mathrm{B}) + n(\mathrm{F} \cap \mathrm{C}) + n(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = 18$.

आकृति 1.12 में दिए वेन आरेख पर विचार कीजिए

आकृति 1.12

यहाँ a उन व्यक्तियों की संख्या को निरूपित करता है जिन्होंने केवल फुटबाल और बास्केटबाल में पदक प्राप्त किए, b उन व्यक्तियों की संख्या को निरूपित करता है जिन्होंने केवल फुटबाल और क्रिकेट में पदक प्राप्त किए और c उन व्यक्तियों की संख्या को निरूपित करता है जिन्होंने केवल बास्केटबाल और क्रिकेट में पदक प्राप्त किए तथा d उन व्यक्तियों की निरूपित करता है जिन्होंने तीनों में पदक प्राप्त किए हैं :

इसलिए $d = n(\mathrm{F} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = 3$ और $a + d + b + d + c + d = 18$.

अतः $a + b + c = 9$, जो उन व्यक्तियों की संख्या है जिन्होंने तीन खेलों में से ठीक दो में पदक प्राप्त किए।

अध्याय 1 पर विविध प्रश्नावली

1. निम्नलिखित समुच्चयों में से, कौन किसका उपसमुच्चय है, इसका निर्णय कीजिए :

$A = \{x^2 - 8x + 12 = 0$ को सन्तुष्ट करने वाली सभी वास्तविक संख्याएँ$\}$,

$B = \{2,4,6\}$

$C = \{2,4,6,8,\ldots\}$

$D = \{6\}$

2. सिद्ध कीजिए $A \subset \phi$ का अर्थ है $A = \phi$

3. ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित में से प्रत्येक कथन सत्य है या असत्य। यदि सत्य है, तो सिद्ध कीजिए। यदि असत्य है, तो एक उदाहरण दीजिए।

(i) यदि $x \in A$ और $A \in B$, तब $x \in B$

(ii) यदि $A \subset B$ और $B \in C$, तब $A \in C$

(iii) यदि $A \subset B$ और $B \subset C$, तब $A \subset C$

(iv) यदि $A \not\subset B$ और $B \not\subset C$, तब $A \not\subset C$

(v) यदि $x \in A$ और $A \not\subset B$, तब $x \in B$

(vi) यदि $A \subset B$ और $x \notin B$, तब $x \notin A$

4. मान लीजिए B, A का उपसमुच्चय है और मान लीजिए

$P(A:B) = \{X \in P(A) \mid X \supset B\}$.

(i) मान लीजिए $B = \{a,b\}$ और $A = \{a,b,c,d\}$। समुच्चय P(A:B) के सभी सदस्यों की सूची बनाइए।

(ii) दिखाइए कि $P(A:\phi) = P(A)$.

5. मान लीजिए कि A, B और C ऐसे समुच्चय हैं कि $A \cup B = A \cup C$ और $A \cap B = A \cap C$, तो दिखाइए कि $B = C$.

6. दिखाइए कि निम्नलिखित चार प्रतिबन्ध तुल्य हैं :

(i) $A \subset B$ (ii) $A - B = \phi$ (iii) $A \cup B = B$ (iv) $A \cap B = A$.

7. दिखाइए कि यदि $A \subset B$, तब $C - B \subset C - A$ है।

8. कल्पना कीजिए कि $P(A) = P(B)$ तो सिद्ध कीजिए $A = B$ है।

9. किन्हीं दो समुच्चयों A और B के लिए, क्या $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ सत्य है? अपने उत्तर का औचित्य बताइए।

10. समुच्चय A और B के लिए, दिखाइए कि
$A = (A \cap B) \cup (A - B)$ और $A \cup (B - A) = A \cup B$

11. समुच्चय के गुणधर्मों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए।
(i) $A \cup (A \cap B) = A$ (ii) $A \cap (A \cup B) = A$.

12. दिखाइए कि $A \cap B = A \cap C$ का अर्थ $B = C$ आवश्यक नहीं है।

13. मान लीजिए A, B समुच्चय हैं। यदि किसी समुच्चय X के लिए $A \cap X = B \cap X = \phi$ और $A \cup X = B \cup X$, तो सिद्ध कीजिए $A = B$.
(संकेत : $A = A \cap (A \cup X)$, $B = B \cap (B \cup X)$ और बंटन नियम का प्रयोग कीजिए)

14. ऐसे समुच्चय A, B तथा C ज्ञात कीजिए ताकि $A \cap B$, $A \cap C$ और $B \cap C$ अरिक्त समुच्चय हों और $A \cap B \cap C = \phi$ है।

15. एक विद्यालय के 600 विद्यार्थियों के सर्वेक्षण से 150 विद्यार्थी चाय पीने वाले, 225 कॉफी पीने वाले और 100 चाय तथा कॉफी, दोनों पीने वाले पाए गए। ज्ञात कीजिए कि कितने विद्यार्थी न तो चाय पीते हैं और न कॉफी।

16. एक विद्यार्थियों के समूह में, 100 विद्यार्थी हिन्दी जानते हैं, 50 अंग्रेजी जानते हैं और 25 दोनों जानते हैं। प्रत्येक विद्यार्थी या तो हिन्दी जानता है या अंग्रेजी। विद्यार्थियों के समूह में कुल कितने विद्यार्थी हैं?

17. 60 व्यक्तियों के सर्वेक्षण से यह पाया गया कि 25 व्यक्ति समाचार पत्र H पढ़ते हैं, 26 समांचार पत्र T पढ़ते हैं, 26 समाचार पत्र I पढ़ते हैं, 9, H और I दोनो पढ़ते हैं, 11, H और T दोनों पढ़ते हैं, 8, T और I दोनों पढ़ते हैं तथा 3 सभी तीनों समाचार पत्र पढ़ते हैं।
(i) उन व्यक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए जो कम से कम एक समाचार पत्र पढ़ते हैं।
(ii) उन व्यक्तियों की संख्या भी ज्ञात कीजिए जो केवल एक समाचार पत्र पढ़ते हैं।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

जर्मन गणितज्ञ **जार्ज कैन्टर (Georg Cantor)** (1845–1918 ई.) को समुच्चय के आधुनिक सिद्धान्त के अधिकांश भाग का जन्मदाता समझा जाता है। समुच्चय सिद्धान्त पर उनके शोध पत्र 1874 ई. से 1897 ई. के मध्य प्रकाश में आये। उनका समुच्चय सिद्धान्त का अध्ययन उस समय प्रगट हुआ जब वह $a_1\sin x + a_2\sin 2x + a_3\sin 3x + \ldots$ के रूप की त्रिकोणमितीय श्रेणी का अध्ययन कर रहे थे। उनका एक शोध पत्र 1874 ई. में प्रकाशित हुआ कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को पूर्णांकों के साथ एक–एक संगतता में नही रखा जा सकता है। 1879 के उत्तरार्द्ध में अमूर्त (abstract) समुच्चयों के विभिन्न गुणधर्मों को दिखाते हुए उनके अनेक शोधपत्र प्रकाशित हुए।

कैन्टर के शोधकार्य को एक दूसरे विख्यात गणितज्ञ **रिचर्ड डेडीकाइन्ड (Richard Dedekind)** (1831-1916 ई.) ने प्रशंसनीय ढंग से स्वीकार किया। लेकिन **क्रोनेकर (Kronecker)** (1810-1893 ई.) ने अनन्त समुच्चयों को परिमित समुच्चयों के ढंग से लेने के लिए उनकी भर्त्सना की। एक दूसरे जर्मन गणितज्ञ **गौटलौब फ्रेज (Gottlob Frege)** नें शताब्दी की समाप्ति पर समुच्चय सिद्धान्त को तर्क के सिद्धान्त के रूप में प्रस्तुत किया। उस समय तक सम्पूर्ण समुच्चय सिद्धान्त सभी समुच्चयों के समुच्चय के अस्तित्व की कल्पना पर आधारित था। यह विख्यात अंग्रेज दार्शनिक **बर्टेण्ड रसल (Bertand Russel)** (1872-1970 ई.) थे जिन्होंने 1902 ई. में दिखाया कि सभी समुच्चयों के समुच्चय के अस्तित्व की कल्पना एक विरोधाभास को जन्म देती है। इससे विख्यात रसल का पैराडॉक्स प्राप्त होता है। **पाल आर. हाल्मोस (Paul R. Halmos)** अपनी पुस्तक Naive Set Theory में यह लिखते हैं कि "कुछ नहीं में सब कुछ है"

रसल पैराडॉक्स की सरलता और सीधापन (Directness) के बोध से फ्रेज या कैन्टर द्वारा प्रस्तावित समुच्चय सिद्धान्त पर आधारित मूल गणित नष्ट होता प्रतीत होने लगा।

रसल का पैराडॉक्स ही अकेला नहीं था जो समुच्चय सिद्धान्त में आया। अनेक गणितज्ञों और तर्कशास्त्रियों ने बाद में अनेक पैराडॉक्स प्रस्तुत किये। इन सभी पैराडॉक्सों के परिणाम स्वरूप समुच्चय का पहला अभिगृहीतिकरण 1908 ई० में अर्नस्त जेरमेलो द्वारा प्रकाशित किया गया। 1922 ई० में अब्राहम फ्रेन्केल ने एक दूसरा प्रस्ताव भी दिया। 1925 ई० में जॉन वोन न्यूमैन ने नियमतीकरण का अभिगृहीत स्पष्ट रूप से प्रस्तुत किया। तत्पश्चात 1937 ई० में पाल वर्नेस ने अत्यधिक संतोषजनक अभिगृहीतिकरण प्रस्तुत किया। इन अभिगृहीतों में सुधार कुर्ट गोडेल ने 1940 ई० में अपने मोनोग्राफ में किया। जिसे वोन न्यूमैन–वर्नेस (VNB) या गोडेल वर्नेस–सिद्धान्त कहा जाता था।

इन सभी कठिनाइयों के बावजूद, कैन्टर के समुच्चय सिद्धान्त को वर्तमान गणित में प्रयोग किया जाता है। वास्तव में, आजकल गणित के अधिकतर परिणामों और संकल्पनाओं को समुच्चय की भाषा में प्रस्तुत किया जाता है।

संबंध एवं फलन

अध्याय 2

(RELATIONS AND FUNCTIONS)

2.1 भूमिका

अपने दैनिक जीवन में, हम बहुत से संबंधों को जानते हैं जैसे पिता और पुत्र, भाई और बहन, अध्यापक और विद्यार्थी का इत्यादि। गणित में भी हमें कुछ ऐसे संबंध मिलते हैं, जैसे (i) A, B का उपसमुच्चय है, (ii) रेखा l, रेखा m के समान्तर है, (iii) संख्या m, संख्या n से छोटी है। इन सभी सम्बंधों में हम देखते हैं कि वस्तुओं का युग्म निश्चित क्रम में होता है। इस अध्याय में हम गणितीय संबंधों और फलनों के विषय में अध्ययन करेंगे।

2.2 समुच्चयों का कार्तीय (Cartesian) गुणन

मान लीजिए A, B दो समुच्चय हैं। यदि $a \in A$, $b \in B$ तब (a, b) एक कमित युग्म *(ordered pair)* निरूपित करता है। जिसका प्रथम घटक a और द्वितीय घटक b है। दो क्रमित युग्म (a, b) और (c, d) समान कहलायेंगे यदि और केवल यदि $a = c$ और $b = d$.

एक क्रमित युग्म (a, b) के कोष्ठक में अवयव a तथा b जिस क्रम में हैं, वह महत्वपूर्ण है। इस प्रकार यदि $a \neq b$, तो (a, b) और (b, a) दो भिन्न क्रमित युग्म हैं तथा एक क्रमित युग्म (a, b) और समुच्चय $\{a, b\}$एक समान नहीं हैं।

परिभाषा 1 $a \in A$, $b \in B$ अवयवों के सभी क्रमित युग्मों (a, b) का समुच्चय, समुच्चयों A और B का कार्त्तीय गुणन *(Cartesian Product)* कहलाता है और इसे $A \times B$ द्वारा निरूपित किया जाता है। इस प्रकार,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

मान लीजिए $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. $A \times B$ के अवयवों को लिखने के लिए, $a_1 \in A$ लीजिए और B के सभी अवयवों को a_1 के साथ लिखिए, अर्थात् (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3)। अब $a_2 \in A$ लीजिए और B के सभी अवयवों को a_2 के साथ लिखिए, अर्थात् (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)। अतः $A \times B$ में छः अवयव नामतः (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3) होंगे।

टिप्पणी

(i) यदि $A = \phi$ या $B = \phi$, तो $A \times B = \phi$

(ii) यदि $A \neq \phi$ और $B \neq \phi$, तो $A \times B \neq \phi$ इस प्रकार, $A \times B \neq \phi$ यदि और केवल यदि $A \neq \phi$ और $B \neq \phi$, तथा $A \times B \neq B \times A$

(iii) यदि समुच्चय A में m अवयव हैं और समुच्चय B में n अवयव हैं तो $A \times B$ में mn अवयव हैं।

(iv) यदि A और B अरिक्त समुच्चय हैं और या तो A या B अन्नत समुच्चय हों तो $A \times B$ अनन्त समुच्चय होगा।

(v) यदि $A = B$, तब $A \times B$ को A^2 द्वारा व्यक्त किया जाता है।

(vi) हम क्रमित त्रिकों (ordered triplets) को भी इसी प्रकार परिभाषित कर सकते हैं। यदि A,B,C तीन समुच्चय हैं, तब (a, b, c), जहाँ $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, एक *क्रमित त्रिक* कहलाता है। समुच्चयों A,B और C का कार्त्तीय गुणन $A \times B \times C = \{(a, b, c) : a \in A, b \in B, c \in C\}$ के रूप में परिभाषित किया जाता है। एक क्रमित–युग्म और क्रमित त्रिक को क्रमशः 2- टपिल तथा 3- टपिल भी कहा जाता है। व्यापक रूप में, यदि $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n समुच्चय हों, तब $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ को n-टपिल कहते हैं जहाँ $a_i \in A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ और ऐसी सभी n-टपिल के समुच्चय को $A_1, A_2, \ldots, A_n$ का कार्त्तीय गुणन कहा जाता है। इसे $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ से निरूपित किया जाता है। इस प्रकार,

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

उदाहरण 1 x और y ज्ञात कीजिए यदि $(x + 2, 4) = (5, 2x + y)$.

हल क्रमित युग्मों के समान होने की परिभाषा से

$$x + 2 = 5 \quad (1)$$

$$2x + y = 4 \quad (2)$$

(1) और (2) को हल करने पर, हम पाते हैं $x = 3$, $y = -2$.

उदाहरण 2 मान लीजिए $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$. $A \times B$ और $B \times A$ ज्ञात कीजिए और दिखाइए कि $A \times B \neq B \times A$

हल $A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$

और $B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$

$(1, 4) \in A \times B$ और $(1, 4) \notin B \times A$ इसलिए $A \times B \neq B \times A$.

उदाहरण 3 मान लीजिए $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3,4\}$, $C = \{4,5,6\}$. निम्न ज्ञात कीजिए

(i) $A \times (B \cap C)$ (ii) $(A \times B) \cap (A \times C)$

(iii) $A \times (B \cup C)$ (iv) $(A \times B) \cup (A \times C)$

हल (i) $B \cap C = \{4\}$. इसलिए, $A \times (B \cap C) = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$

(ii) $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$

और $A \times C = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

इसलिए, $(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$

(iii) $B \cup C = \{3, 4, 5, 6\}$, इसलिए

$A \times (B \cup C) = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

(iv) (ii) से हम देखते हैं कि

$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1, 3),(1, 4),(1, 5),(1, 6), (2, 3),(2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

हम यह भी प्राप्त करते हैं कि

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

और $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

उदाहरण 4 मान लीजिए A और B दो समुच्चय ऐसे हैं कि $n(A) = 5$ और $n(B) = 2$. यदि $(a_1, 2), (a_2, 3), (a_3, 2), (a_4, 3), (a_5, 2)$, $A \times B$ में हैं और a_1, a_2, a_3, a_4 और a_5 भिन्न–भिन्न हैं, तो A और B ज्ञात कीजिए।

हल चूँकि $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in A$ और $n(A) = 5$, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ तथा $2, 3 \in B$ और $n(B) = 2$, इसलिए $B = \{2,3\}$

उदाहरण 5 यदि A, B दो अरिक्त समुच्चय ऐसे हैं कि $A \times B = B \times A$, दिखाइए कि $A = B$.

हल मान लीजिए $a \in A$ चूँकि $B \neq \phi$, $b \in B$ का अस्तित्व है। अब $(a, b) \in A \times B = B \times A$ इस प्रकार $a \in B$ इसलिए, A का प्रत्येक अवयव B में है। हम पाते हैं $A \subset B$। इसी प्रकार, $B \subset A$ है। अतः $A = B$

प्रश्नावली 2.1

1. x और y ज्ञात कीजिए, यदि $(2x, x + y) = (6, 2)$

2. मान लीजिए $A = \{a, b, c\}$, $B = \{p, q\}$, निम्न ज्ञात कीजिए

   (i) $A \times B$ (ii) $B \times A$ (iii) $A \times A$ (iv) $B \times B$.

3. मान लीजिए $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$ और $C = \{4,5\}$. निम्न सत्यापित्र कीजिए

(i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(ii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

4. मान लीजिए $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4\}$ और $C = \{5\}$ है। निम्न सत्यापित कीजिए

(i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(ii) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

5. मान लीजिए $A = \{1,2,3,4\}$ है तथा $S = \{(a, b) : a \in A, b \in A, a , b$ को विभाजित करता है$\}$, तो S को स्पष्ट रूप से लिखिए।

6. मान लीजिए $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$ है। $A \times B$ के सभी उपसमुच्चय लिखिए।

7. मान लीजिए A और B दो ऐसे समुच्चय हैं कि $n(A) = 3$, $n(B) = 2$ यदि $(x, 1), (y, 2), (z, 1)$, $A \times B$ में हैं, तो A और B ज्ञात कीजिए जहाँ x, y, z भिन्न–भिन्न अवयव हैं।

8. मान लीजिए $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $C = \{5,6\}$, $D = \{5,6,7,8\}$ सत्यापित कीजिए कि $A \times C \subset B \times D$

9. मान लीजिए A एक ऐसा अरिक्त समुच्चय है कि $A \times B = A \times C$ है, तो दिखाइए कि $B = C$

10. कार्त्तीय गुणनफल $A \times A$ में 9 अवयव हैं जिनमें $(-1, 0)$ और $(0, 1)$ भी पाये गये। समुच्चय A तथा $A \times A$ के शेष अवयवों को ज्ञात कीजिए।

2.3 संबंध

इस अनुभाग में, दो समुच्चयों के बीच में संबंधों का अध्ययन करेंगे। हम A से B में संबंध को निम्न प्रकार से परिभाषित करेंगे :

परिभाषा 2 मान लीजिए A और B दो समुच्चय हैं। A से B में संबंध $A \times B$ का एक उपसमुच्चय होता है।

मान लीजिए A से B में R एक संबंध है। यदि $(a, b) \in R$ है तो हम कहते हैं कि a और b में R संबंध है या a, R के सापेक्ष b से संबंधित है। हम $(a ,b) \in R$ को aRb भी लिखते हैं। उन सभी अवयवों $a \in A$ का समुच्चय जबकि किसी $b \in B$ के लिए $(a, b) \in R$ हो, R का प्रान्त या डोमेन (*domain*) कहलाता है। इस प्रकार, R का प्रांत $= \{a \in A : (a, b) \in R$ किसी $b \in B$ के लिए$\}$ इसी प्रकार R का परिसर $= \{ b \in B : (a, b) \in R$, किसी $a \in A$ के लिए$\}$ द्वारा परिभाषित होता है जो B का उपसमुच्चय है। B को R का सह प्रान्त (*co-domain*) कहते हैं।

यदि समुच्चय A का स्वयं से संबंध हो तो R को A पर संबंध कहा जाता है। इस स्थिति में, R, $A \times A = A^2$ का उपसमुच्चय है। कल्पना कीजिए R, A से B में एक संबंध है। यदि $R = \phi$, तब R रिक्त संबंध (*empty relation*) कहलाता है। यदि $R = A \times B$, तब R सार्वत्रिक संबंध (*universal relation*) कहलाता है।

उदाहरण 6 मान लीजिए $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ हैं। मान लीजिए $R = \{(a, b) : a \in A, b \in B, a, b$ को विभाजित करता है$\}$ A और B में संबंध है। R ज्ञात कीजिए। दिखाइए कि R का प्रान्त A है और R का परिसर B है।

हल $R = \{(1,2), (1,4), (1,6), (1,8), (1,10), (2, 2), (2,4), (2,6), (2,8), (2,10), (3,6), (4,4), (4,8), (5,10)\}$. R का प्रान्त $= \{1,2,3,4,5\} = A$ क्योंकि $(1,2), (2,4), (3,6), (4,8), (5,10) \in R$ और R का परिसर $= \{2,4,6,8,10\} = B$ है क्योंकि $(1,2), (2, 2), (2,4), (3,6), (4,8), (5,10) \in R$

उदाहरण 7 मान लीजिए प्राकृत संख्याओं के समुच्चय **N** पर संबंध R, $a + 3b = 12$ से परिभाषित है। निम्न ज्ञात कीजिए,

(i) R,

(ii) R का प्रान्त और

(iii) R का परिसर।

हल (i) $R = \{(a, b) : a \in \mathbf{N}, b \in \mathbf{N}, a + 3b = 12\}$

$= \{(9, 1), (6, 2), (3, 3)\}$

यहाँ, हम $b = 1, 2$ और 3 लेते हैं। जब $b > 3$ तब a, 0 या ऋणात्मक होता है जो संभव नहीं है।

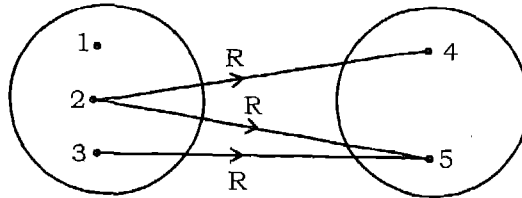
(ii) R का प्रान्त $= \{9, 6, 3\}$

(iii) R का परिसर $= \{1, 2, 3\}$

उदाहरण 8 मान लीजिए

$A = \{3, 5\}$, $B = \{7, 11\}$ है तथा संबंध $R = \{(a, b) : a \in A, b \in B, a-b$ विषम है$\}$। दिखाइए कि R, A से B में रिक्त संबंध है।

हल चूँकि (3–7),(3–11), (5–7), (5–11) विषम संख्याएँ नहीं है, R एक रिक्त संबंध है।

समुच्चय A से समुच्चय B में संबंध को हम तीर आरेख (arrow diagram) द्वारा प्रदर्शित कर सकते हैं। मान लीजिए $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5\}$ तो A से B में संबंध $R = \{(2,4), (2,5), (3,5)\}$, आकृति 2.1 के अनुसार प्रदर्शित किया जायेगा।

आकृति 2.1

हम R को सारणिक रूप में निम्न प्रकार भी प्रदर्शित कर सकते हैं :

R	4	5
1	0	0
2	1	1
3	0	1

यहाँ, इस प्रचलन का अनुसरण करेंगे कि यदि $(a, b) \in R$, तो हम 1 लिखते हैं और यदि $(a, b) \notin R$, हम 0 लिखते हैं।

चूँकि $(1,4) \notin R$, हम 1 रखने वाली पंक्ति और 4 रखने वाले स्तम्भ में 0 लिखते हैं चूँकि $(2,4) \in R$, हम 2 रखने वाली पंक्ति और 4 रखने वाले स्तम्भ में 1 लिखते हैं। आरेख के अन्य सदस्यों के लिए भी इसी प्रकार की व्याख्या प्रभावी है।

समुच्चय A से समुच्चय B में संबंधों की संख्या $A \times B$ के उपसमुच्चयों की संख्या है।

उदाहरण 9 मान लीजिए $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$, A से B में संबंधों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल $A \times B = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$.

चूँकि $n(A \times B) = 4$, $A \times B$ के उपसमुच्चयों की संख्या 2^4 है। इसलिए A से B में संबंधों की संख्या 16 है।

प्रश्नावली 2.2

1. मान लीजिए $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{x, y, z\}$ है। मान लीजिए A से B में संबंध $R = \{(1, x), (1, z), (3, x), (4, y)\}$ से परिभाषित है। R के प्रान्त तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

2. प्रश्न 1 में संबंध R का तीर आरेख खींचिए।

3. प्रश्न 1 में R को सारणी रूप में प्रदर्शित कीजिए।

4. मान लीजिए $A = \{1,2,3,4,6\}$ है। मान लीजिए A पर संबंध $R = \{(a,b) : a \in A, b \in A$, a, b को विभाजित करता है$\}$ से परिभाषित है। ज्ञात कीजिए (i) R, (ii) R का प्रान्त, (iii) R का परिसर।

5. मान लीजिए **Z** पर संबंध R, $a\text{R}b$ यदि और केवल यदि $a - b$ एक समपूर्णांक है, से परिभाषित है। ज्ञात कीजिए (i) R (ii) R का प्रान्त, (iii) R का परिसर।

6. मान लीजिए **Z** पर R संबंध $R = \{(a, b) : a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}, a^2 = b^2\}$ से परिभाषित है। ज्ञात कीजिए (i) R (ii) R का प्रान्त, (iii) R का परिसर।

7. संबंध R का प्रान्त तथा परिसर ज्ञात कीजिए यदि

$R = \{(x+1, x+5) : x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$ से परिभाषित है।

8. संबंध R का प्रान्त तथा परिसर ज्ञात कीजिए जहाँ

$R = \{(x, x^3) : x$, 10 से कम एक अभाज्य संख्या है$\}$

9. निम्नलिखित संबंधों के प्रान्त एवं परिसर ज्ञात कीजिए :

(i) $\{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8)\}$

(ii) $\{(x, y) : x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}$ और $x + y = 10\}$

(iii) $\{(x, y) : x \in \mathbf{N}, x < 5, y = 3\}$

(iv) $\{(x, y) : y = |x - 1|, x \in \mathbf{Z}$ और $|x| \leq 3\}$

10. मान लीजिए $A = \{1, 2\}$ है। A पर सभी संबंधों को सूचीबद्ध कीजिए।

11. मान लीजिए $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 2\}$ हैं। A से B में संबंधों की संख्या ज्ञात कीजिए।

2.4 फलन (Functions)

इस अनुभाग में हम विशिष्ट प्रकार के संबंध का अध्ययन करेंगे, जिसे फलन (Function) कहते हैं। अंग्रेजी शब्द "Function" एक लैटिन शब्द, जिसका अर्थ 'संक्रिया', से व्युत्पन्न है। इस प्रकार, जब हम एक दिए धन पूर्णांक x को दुगना करते हैं, हम सोचते हैं कि एक पूर्णांक x पर एक सम पूर्णांक $2x$ पाने के लिए संक्रिया की गई है। इसलिए, हम फलन को एक नियम के रूप में देखते हैं, जिससे कुछ दी हुई संख्याओं से नयी संख्याएँ उत्पन्न होती हैं। फलन को निरूपित करने के लिए अनेक पद जैसे 'प्रतिचित्र' (map), 'प्रतिचित्रण' (mapping) का प्रयोग करते हैं। हम विभिन्न प्रकार के फलनों यथा एकैकी (one-to-one), आच्छादक (onto), तत्समक फलन (Identity function) और अचर फलन (Constant function) का अध्ययन करेंगे।

परिभाषा 3 फलन f एक अरिक्त समुच्चय A से एक अरिक्त समुच्चय B में एक संबंध है यदि f का प्रान्त A है और f के दो क्रमित युग्मों में प्रथम अवयव एक समान नहीं हैं। दूसरे शब्दों में, समुच्चय A से समुच्चय B में एक फलन f, समुच्चय A से समुच्चय B में एक संबंध है यदि प्रत्येक अवयव $a \in A$ के लिए अद्वितीय $b \in B$ का अस्तित्व है ताकि $(a,b) \in f$ है।

यदि f, A से B में फलन है, तब हम लिखतें हैं कि $(a,b) \in f$ या $f(a) = b$ जहाँ $a \in A$, $b \in B$, b को f के अन्तर्गत a का 'प्रतिबिम्ब' कहते हैं और a को f के अन्तर्गत b का 'पूर्व प्रतिबिम्ब' कहते हैं। फलन A से B को $f : A \rightarrow B$ से निरूपित करते हैं।

परिभाषा 4 यदि f, A से B में एक फलन है, तब f का परिसर $\{f(a) : a \in A\}$ है। इसे $f(A)$ से भी निरूपित किया जाता है।

उदाहरण 10 मान लीजिए A = {1,2,3}, B = {4,5} तथा f = {(1,4), (1,5), (2,4), (3,5)} क्या f, A से B में एक फलन है?

हल चूँकि f में दो क्रमित युग्म (1,4) और (1,5) में पहला अवयव एक समान है, अतः f, A से B में फलन नहीं है।

उदाहरण 11 मान लीजिए A = {1,2,3}, B = {4,5} और f = {(2,4), (3,5)} हैं। क्या f, A से B में फलन है?

हल f, A से B में एक संबंध है और f का प्रान्त {2, 3} है जो A नहीं है। इसलिए f, A से B में फलन नहीं है। किन्तु f, A′ = {2, 3} से B में फलन है।

उदाहरण 12 मान लीजिए f प्राकृत संख्याओं के समुच्चय **N** पर एक संबंध है, तथा $f = \{(n, 3n) : n \in \mathbf{N}\}$ से परिभाषित है। क्या f, **N** से **N** में फलन है? यदि ऐसा है तो f का परिसर ज्ञात कीजिए।

हल चूँकि प्रत्येक $n \in$ **N** के लिए, एक अद्वितीय $3n \in$ **N** का ऐसा अस्तित्व है कि $(n, 3n) \in f$। इसलिए, f एक फलन है। f का परिसर $\{f(x) : x \in \mathbf{N}\} = \{3n : n \in \mathbf{N}\}$ है।

उदाहरण 13 मान लीजिए $f = \left\{\left(x, \frac{x^2}{1+x^2}\right) : x \in \mathbf{R}\right\}$ **R** से **R** में एक फलन है। f का परिसर ज्ञात कीजिए।

हल स्पष्टतः $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ एक फलन है जहाँ $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ है। मान लीजिए $y = \frac{x^2}{1+x^2}$ है।

इस प्रकार $x^2 = y\,(1+x^2)$ इसलिए, $x^2(1-y) = y$ का अर्थ है कि $x = \pm\sqrt{\frac{y}{1-y}}$ चूँकि $x \in$ **R**,

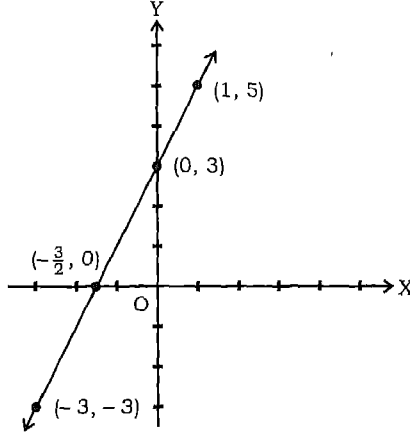
$\frac{y}{1-y} \geq 0$ और $1 - y \neq 0$ है। इस प्रकार, $y \geq 0$, $y \neq 1$ और $(1 - y) > 0$ हैं।

इस प्रकार, $0 \leq y < 1$ हैं। इसलिए, f का परिसर $= \{y = f(x) : 0 \leq y < 1\}$

परिभाषा 5 फलन $f : A \to B$ का आलेख $A \times B$ में बिन्दुओं $(a, f(a))$ का समुच्चय है जहाँ $a \in A$.

हम निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा फलन के आलेख की संकल्पना प्रस्तुत करते हैं :

उदाहरण 14 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 3$ से परिभाषित एक फलन का आलेख खींचिए।

हल $f = \{(x, 2x+3) : x \in \mathbf{R}\}, x = -\frac{3}{2}, 0, 1, -3$ के लिएं हम क्रमशः $f(x) = 0, 3, 5, -3$ पाते हैं। हम कुछ बिन्दुओं को जैसे $(-\frac{3}{2}, 0)$, (0,3), (1,5), (–3,–3) चिन्हित करते हैं। हम देखते हैं कि ये बिन्दु रेखा $y = 2x + 3$ पर स्थित हैं। इसलिए, f का तल में आलेख आकृति 2.2 में दर्शाया गया है।

आकृति 2.2

ऐसा फलन रैखिक फलन कहलाता है।

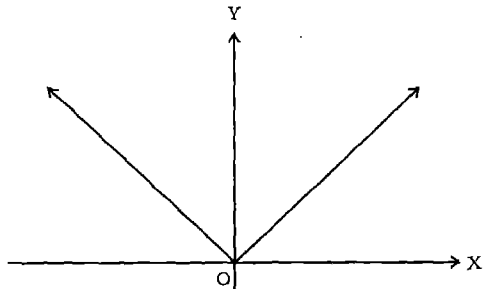
उदाहरण 15 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$ से परिभाषित फलन का आलेख खींचिए।

हल हम जानते हैं कि यह फलन

$$f(x) = \begin{cases} x, x \geq 0 \text{ के लिए} \\ -x, x < 0 \text{ के लिए} \end{cases}$$

द्वारा भी लिखा जा सकता है।

हम देखते हैं कि बिन्दु $(x, f(x)), x \geq 0$ के लिए रेखा $y = x$ पर होते हैं और बिन्दु $(x, f(x)), x < 0$ के लिए रेखा $y = -x$ पर होते हैं।

f का आलेख आकृति 2.3 में दर्शाया गया है। यह फलन निरपेक्ष मान फलन (absolute value function) कहलाता है।

आकृति 2.3

उदाहरण 16 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = [x]$, जहाँ x एक वास्तविक संख्या है, से परिभाषित फलन का ग्राफ खींचिये। प्रतीक $[x]$ का अर्थ x के बराबर या x से कम सबसे बड़ा पूर्णांक है। इस प्रकार, $[2.3] = 2$, $[4.1] = 4$, $[-3.3] = -4$, $[2] = 2$ और $[0.99] = 0$, हैं।

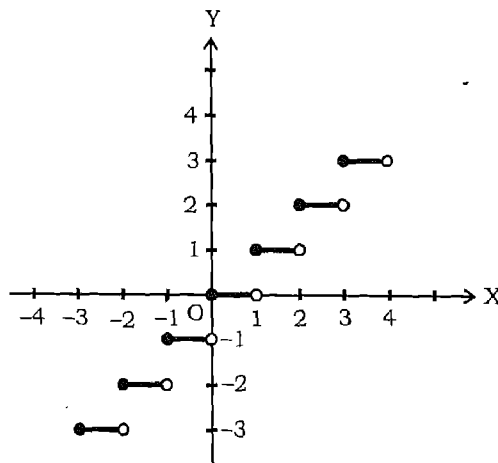
हल फलन के आलेख में $(x,[x])$ के रूप के सभी क्रमित युग्म होंगे। $[x]$ की परिभाषा से, हम देख सकते हैं कि

$-1 \le x < 0$ के लिए $[x] = -1$

$0 \le x < 1$ के लिए $[x] = 0$

$1 \le x < 2$ के लिए $[x] = 1$

$2 \le x < 3$ के लिए $[x] = 2$ और इसी प्रकार, इत्यादि।

$-3 \le x < 4$ के लिए $f(x) = [x]$ का आलेख आकृति 2.4 में दिखाया गया है।

आकृति 2.4

ध्यान दीजिए कि गहरे बिन्दु दर्शाते हैं कि बिन्दु सम्मिलत है और वृत दर्शाते हैं कि बिन्दु सम्मिलित नहीं है।

यह फलन $f(x) = [x]$, सबसे बड़ा पुर्णांक फलन कहलाता है।

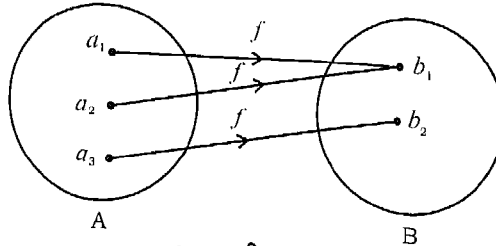
परिभाषा 6 यदि दो फलन $f: A \to B$ और $g : A \to B$ ऐसे हों कि सभी a के लिये $f(a) = g(a)$ है तो ऐसे फलन समान फलन कहलाते हैं। इस स्थिति में, हम $f = g$ लिखते हैं। f और g के समान होने के लिए, यह ध्यान देना होगा कि f और g का प्रान्त एक समान होने चाहिए और प्रान्त के प्रत्येक बिन्दु के लिए f और g का मान एक समान हो।

उदाहरण 17 मान लीजिए $f : \mathbf{R} - \{2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x-2}$ द्वारा परिभाषित है और $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x + 2$ से परिभाषित हैं। बताइए कि $f = g$ है या नहीं।

हल चूँकि f का प्रान्त $\mathbf{R} - \{2\}$ और g का प्रान्त $\mathbf{R}$ है। इसलिए $f \neq g$ है। यद्यपि सभी $x \in \mathbf{R} - \{2\}$ के लिए $f(x) = g(x)$ है।

परिभाषा 7 फलन $f : A \to B$, आच्छादक (onto) फलन कहलाता है यदि f का परिसर B है। दूसरे शब्दों में, यदि प्रत्येक $b \in B$ के लिए, कम से कम एक $a \in A$ का अस्तित्व है ताकि $f(a) = b$, तो f एक आच्छादक फलन है। एक आच्छादक फलन को आच्छादी फलन (surjective function) भी कहते हैं।

मान लीजिए $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2\}$

तब $f : A \to B$ (आकृति 2.5 में प्रदर्शित) एक आच्छादक फलन या आच्छादी फलन है।

आच्छादी फलन

आकृति 2.5

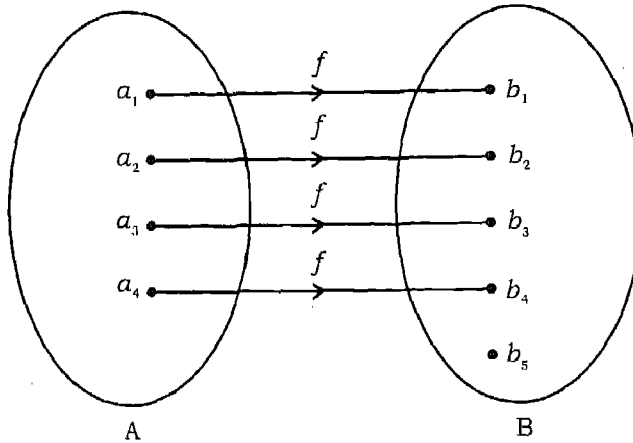
उदाहरण 18 मान लीजिए $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5\}$ तथा $f = \{(1,4), (2,5), (3,5)\}$ है। दिखाइए कि f, A से B में, एक आच्छादक फलन है।

हल चूँकि f का प्रान्त A है और f में कोई दो क्रमित युग्मों के प्रथम घटक एक समान नहीं है, f एक फलन है तथा f का परिसर $\{4,5\}$ है। इसलिए, $f : A \to B$, एक आच्छादक फलन है।

उदाहरण 19 मान लीजिए $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x) = 3x$ से परिभाषित है। दिखाइए कि f एक आच्छादक फलन नहीं है।

हल f का परिसर $\{3n : n \in \mathbf{N}\}$ है जो $\mathbf{N}$ नहीं है। इसलिए, f एक आच्छादक फलन नहीं है।

परिभाषा 8 एक फलन $f : A \to B$ एकैकी (*one-to-one*) कहलाता है यदि सभी $a_1, a_2 \in A$ के लिए $f(a_1) = f(a_2)$ से $a_1 = a_2$, प्राप्त हो। विकल्पतः, $f : A \to B$ एकैकी है यदि A में $a_1 \neq a_2$ है तब $f(a_1) \neq f(a_2)$ है। एकैकी फलन को एकैक फलन (*injective function*) भी कहते हैं।

मान लीजिए $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ । तब $f: A \to B$ (आकृति 2.6 में प्रदर्शित) एकैकी या एकैक फलन है।

एकैकी फलन

आकृति 2.6

उदाहरण 20 मान लीजिए $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित है। क्या f एकैकी है ?

हल ध्यान दीजिए कि $1 \neq -1$ जबकि $f(1) = 1 = f(-1)$ है। अतः f एकैकी नहीं है।

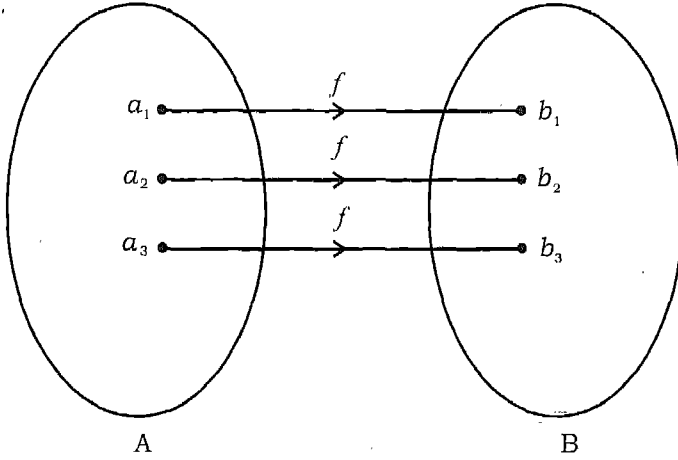
तथापि, यदि $f: \mathbf{R^+} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित है तो f एकैकी है क्योंकि $f(x) = f(y)$ से प्राप्त होता है $x^2 = y^2$ । इसलिए $x = y$ क्योंकि $x, y \in \mathbf{R^+}$ ।

उदाहरण 21 मान लीजिए $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, और A से B में $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ एक फलन है। दिखाइए कि f, A से B में एकैकी फलन है।

हल यहाँ $f(1) = 4$, $f(2) = 5$, $f(3) = 6$ हैं। इस प्रकार, A के विभिन्न अवयवों का f के अन्तर्गत B में विभिन्न प्रतिबिम्ब हैं। इस प्रकार, f एकैकी फलन है।

परिभाषा 9 एक फलन $f: A \to B$ जो एकैकी और आच्छादक दोनों हैं, एकैकी एंव आच्छादक फलन (*bijective function*) कहलाता है।

मान लीजिए $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ ।

मान लीजिए $f: A \to B$ आकृति 2.7 द्वारा परिभाषित है।

एकैकी आच्छादक फलन

आकृति 2.7

तब f एकैकी आच्छादक फलन है।

उदाहरण 22 मान लीजिए $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, f(x) = -x$ द्वारा परिभाषित है। दिखाइए कि f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

हल हम देखते हैं कि $f(n) = f(m)$ से $n = m$ प्राप्त है। इस प्रकार, $n = m$ हैं। इसलिए, f एकैकी है। पुनः किसी $n \in \mathbf{Z}$ के लिए $-n \in \mathbf{Z}$ का अस्तित्व है और $f(-n) = n$ है। इस प्रकार, f आच्छादक भी है। अतः f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

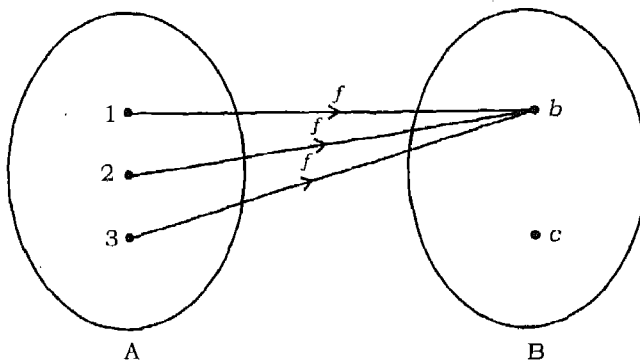
टिप्पणी मान लीजिए $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ एक फलन है और A, B परिमित समुच्चय हैं। तब

(i) यदि f एकैकी है, तब $n(\mathrm{A}) \leq n(\mathrm{B})$ है।

(ii) यदि f आच्छादक है, तब $n(\mathrm{B}) \leq n(\mathrm{A})$ है।

(iii) यदि f एकैकी और आच्छादक दोनों है, तब $n(\mathrm{A}) = n(\mathrm{B})$ है।

परिभाषा 10 यदि $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ ऐसा फलन हो ताकि सभी $a \in \mathrm{A}$ के लिए, $f(a) = b$, (b, B का एक निश्चित अवयव है) तब f एक अचर फलन (*constant function*) कहलाता है। अचर फलन का परिसर एकल समुच्चय $\{b\}$ है।

एक अचर फलन को आकृति 2.8 में दर्शाया गया है।

अचर फलन

आकृति 2.8

परिभाषा 11 यदि $f: A \to A$ ऐसा फलन हो ताकि प्रत्येक $a \in A$ के लिए $f(a) = a$, है तो f तत्समक फलन (*identity function*) कहलाता है। इसे I_A या सरलतम रूप I से निरूपित किया जाता है। स्पष्टतः तत्समक फलन एकैकी और आच्छादक दोनों है। तत्समक फलन के लिए, प्रान्त, सह प्रान्त और परिसर एक समान हैं।

उदाहरण 23 निम्नांकित में प्रत्येक में बताइए कि कौन सा फलन आच्छादक, एकैकी या एकैकी आच्छादक है। अपने उत्तर का औचित्य भी दीजिए।

(i) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3 - 4x$ से परिभाषित है।

(ii) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 1 + x^2$ से परिभाषित है।

(iii) $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(n) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2}, & \text{यदि } n \text{ विषम है।} \\ \dfrac{n}{2}, & \text{यदि } n \text{ सम है।} \end{cases}$

से परिभाषित है।

हल (i) हम देखते हैं कि $f(x) = f(y)$ से $3 - 4x = 3 - 4y$ प्राप्त होता है। इस प्रकार, $x = y$ है। इसलिए, f एकैकी है। दिया है कि $y \in \mathbf{R}$, $\dfrac{3-y}{4} \in \mathbf{R}$ इस प्रकार हैं कि $f\left(\dfrac{3-y}{4}\right) = 3 - 4\left(\dfrac{3-y}{4}\right) = y$ है। इस प्रकार, f आच्छादक है। अतः f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

(ii) $1, -1 \in \mathbf{R}$ लीजिए। प्रत्यक्षतः $1 \neq -1$, लेकिन $f(1) = f(-1) = 2$ है। इस प्रकार f एकैकी नहीं है। यदि f आच्छादक है, तो $0 \in \mathbf{R}$ का अर्थ है कि $x \in \mathbf{R}$ का एक ऐसा अस्तित्व हो ताकि $f(x) = 0$ है। इस प्रकार, $1 + x^2 = 0$ प्राप्त होता है इसलिए $x^2 = -1, x \in \mathbf{R}$, जो कि सत्य नहीं है। अतः f आच्छादक नहीं है।

(iii) $3,4 \in \mathbf{N}$ लीजिए। प्रत्यक्षतः $3 \neq 4$, लेकिन $f(3) = f(4) = 2$ है। इस प्रकार, f एकैकी नहीं है। इसलिए f एकैकी आच्छादक नहीं है। ध्यान दीजिए $f(1) = 1, f(3) = 2, \ldots, f(2n-1) = n$ इत्यादि। इसलिए, f का परिसर $\mathbf{N}$ है। अतः f आच्छादक है।

प्रश्नावली 2.3

1. निम्नांकित संबंधों में से कौन फलन हैं? कारण बताइये। यदि यह एक फलन है तो इसका प्रान्त तथा परिसर बताइए।

(i) $\{(2,1), (5,1), (8,1), (11,1), (14,1), (17,1)\}$
(ii) $\{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4), (10,5), (12,6), (14,7)\}$
(iii) $\{(0,0), (1,1), (1,-1), (4,2), (4,-2), (9,3), (9,-3), (16,4), (16,-4)\}$
(iv) $\{(1,2), (1,3), (2,5)\}$
(v) $\{(2,1), (3,1), (5,2)\}$
(vi) $\{(1,2), (2,2), (3,2)\}$

2. निम्नांकित फलनों के प्रान्त एवं परिसर ज्ञात कीजिए :

(i) $\left\{\left(x, \dfrac{x^2-1}{x-1}\right) : x \in \mathbf{R}, x \neq 1\right\}$ (ii) $\{(x, -|x|) : x \in \mathbf{R}\}$

(iii) $\left\{\left(x, \sqrt{9-x^2}\right) : x \in \mathbf{R}\right\}$ (iv) $\left\{\left(x, \dfrac{1}{1-x^2}\right) : x \in \mathbf{R}, x \neq 1\right\}$

निम्नलिखित फलनों का आलेख खींचिए :

(i) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ऐसा है कि $f(x) = 4 - 2x$
(ii) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ऐसा है कि $f(x) = |x - 2|$

4. मान लीजिए $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ फलन हैं जो $f = \{(n, n^2) : n \in \mathbf{Z}\}$, $g = \{(n, |n|^2) : n \in \mathbf{Z}\}$ से परिभाषित हैं। दिखाइए कि $f = g$

5. ज्ञात कीजिए, निम्नलिखित में से कौन से फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ आच्छादक हैं :

(i) $f(x) = x + 1$ (ii) $f(x) = x^3$ (iii) $f(x) = |x| + x$.

(iv) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ यदि } x \text{ परिमेय है।} \\ -1, \text{ यदि } x \text{ परिमेय नहीं है।} \end{cases}$

6. ज्ञात कीजिए प्रश्न 5 के प्रतिचित्रणों में से कौन एकैकी हैं ?

7. ज्ञात कीजिए यदि नीचे दिये गये फलन एकैकी हैं :

(i) भारत के प्रत्येक प्रदेश की राजधानी नियत है।

(ii) पृथ्वी के प्रत्येक व्यक्ति के लिए एक संख्या नियत है जो उसकी ऊँचाई के संगत है।

(iii) विश्व के प्रत्येक देश की राजधानी का आक्षांश एवं देशान्तर नियत है।

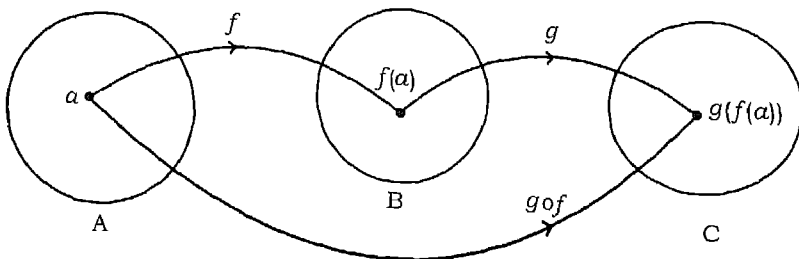
8. मान लीजिए $A = \{-1, 0, 1\}$ और $f = \{(x, x^2) : x \in A\}$ है। दिखाइए कि $f : A \to A$ न तो एकैकी है और न ही आच्छादक।

9. मान लीजिए A और B दो समुच्चय हैं। दिखाइए कि $f : A \times B \to B \times A$ इस प्रकार कि $f(a, b) = (b, a)$, एक एकैकी आच्छादक फलन है।

10. मान लीजिए $f : A \to B$ एकैकी ऐसा फलन है कि f का परिसर $\{b\}$ है। A के अवयवों की संख्या ज्ञात कीजिए।

2.5 फलनों का संयोजन (Composition of Functions)

इस अनुभाग में हम दो फलनों के संयोजन का अध्ययन करेंगे। व्युत्क्रमणीय (invertible) फलन की संकल्पना और फलन के प्रतिलोम (inverse) का भी अध्ययन करेंगे। हम निम्नलिखित परिभाषा से प्रारम्भ करते हैं।

परिभाषा 12 मान लीजिए A,B,C तीन समुच्चय हैं। मान लीजिए $f : A \to B$, $g : B \to C$ दो फलन हैं। यहाँ हमने f के सह प्रान्त को g का प्रान्त लिया है। एक फलन $gof : A \to C$ ऐसा परिभाषित कीजिए ताकि सभी $a \in A$ के लिए $(gof)(a) = g(f(a))$ है। चूँकि $f(a) \in B$, $g(f(a)) \in C$ है। इस प्रकार से प्राप्त फलन gof को f और g का संयोजन कहा जाता है। इसे आकृति 2.9 में दिखाए आरेख द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है।

आकृति 2.9

उदाहरण 24 मान लीजिए $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5\}$, $C = \{5,6\}$ हैं। मान लीजिए $f : A \to B$, $g : B \to C$, $f(1) = 4$, $f(2) = 5$, $f(3) = 4$, $g(4) = 5$, $g(5) = 6$ द्वारा परिभाषित हैं। $gof : A \to C$ ज्ञात कीजिए।

हल $(gof)(1) = g(f(1)) = g(4) = 5$

$(gof)(2) = g(f(2)) = g(5) = 6$

$(gof)(3) = g(f(3)) = g(4) = 5$

इस प्रकार, $gof = \{(1,5), (2,6), (3,5)\}$, A से C में एक फलन है।

उदाहरण 25 मान लीजिए $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x - 3$ द्वारा परिभाषित है और $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{x+3}{2}$ द्वारा परिभाषित है। दिखाइए कि $fog = I_{\mathbf{R}} = gof$

हल $(fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+3}{2}\right) = 2\left(\frac{x+3}{2}\right) - 3 = x$

और $(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x-3)\ \frac{2x-3+3}{2}$

इसलिए, $fog = I_{\mathbf{R}} = gof$

यहां ध्यान देने योग्य है कि gof केवल तभी परिभाषित है जब g के प्रान्त में f का परिसर निहित है। व्यापक रूप से, यदि gof परिभाषित है तो fog परिभाषित नहीं भी हो सकता है। यद्यपि fog तथा gof दोनों परिभाषित हों फिर भी वे समान नहीं हो सकते हैं। इसे निम्नलिखित उदाहरण में देखा जा सकता है।

उदाहरण 26 मान लीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2+3x+1$, $g(x) = 2x-3$ से परिभाषित हैं। fog तथा gof ज्ञात कीजिए।

हल $(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x-3) = (2x-3)^2 + 3(2x-3) + 1 = 4x^2-6x+1$

$(gof)(x) = g(f(x) = g(x^2 + 3x + 1) = 2(x^2+3x+1) - 3 = 2x^2+6x-1$

अतः $fog \neq gof$

उदाहरण 27 मान लीजिए $f : A \to B$, $g : B \to C$ दो फलन हैं। यदि f, g दोनों एकैकी हैं। दिखाइए कि gof भी एकैकी फलन है।

हल मान लीजिए $x, y \in A$ तथा $(gof)(x) = (gof)(y)$, तब $g(f(x)) = g(f(y))$ है। क्योंकि g एकैकी है इसलिए $f(x) = f(y)$ है। पुनः क्योंकि f भी एकैकी है अतः $x = y$ है इस प्रकार, gof एकैकी है।

उदाहरण 28 मान लीजिए $f : A \to B$, $g : B \to A$ दो फलन ऐसे हैं ताकि $gof = I_A$ दिखाइए कि f एकैकी है और g आच्छादक फलन है।

हल मान लीजिए $f(x) = f(y)$, $x,y \in A$, तब $g(f(x)) = g(f(y))$। इस प्रकार, $(gof)(x) = (gof)(y)$ से प्राप्त है $x = y$ क्योंकि $gof = I_A$ है। इसलिए, f एकैकी है। मान लीजिए $a \in A$, तब

$f(a) = b \in B$ अब $g(b) = g(f(a)) = (gof)(a) = a$ है। इस प्रकार, b, g के अन्तर्गत a का पूर्व प्रतिबिम्ब है। इसलिए, g आच्छादक है।

परिभाषा 13 मान लीजिए $f : A \to B$ एक फलन है। यदि $g : B \to A$ एक ऐसे फलन का अस्तित्व है कि $fog = I_B$, $gof = I_A$, तब f व्युत्क्रमणीय फलन कहलाता है और g, f का प्रतिलोम (*inverse*) कहलाता है। हम g को f^{-1} लिखते हैं। उदाहरणतः मान लीजिए $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=2x+3$ से परिभाषित है। तब $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{x-3}{2}$ द्वारा परिभाषित फलन f का प्रतिलोम है।

उदाहरण 29 यदि $f : A \to B$ एकैकी और आच्छादक है, तब f एक व्युत्क्रमणीय फलन है।

हल मान लीजिए $b \in B$. चूँकि f आच्छादक है, $a \in A$ का अस्तित्व है कि $f(a) = b$ है। चूँकि f एकैकी भी है, प्रत्येक $b \in B$ के लिए a अद्वितीय ज्ञात किया जाता है। फलन $g : B \to A$, $g(b) = a$ द्वारा परिभाषित कीजिए जहाँ प्रत्येक b के लिए, $f(a)=b$ है। अतः सभी $b \in B$ के लिए, $(fog)(b) = f(g(b)) = f(a) = b$ है। इसलिए, $fog = I_B$ सभी $a \in A$ के लिए $(gof)(a) = g(f(a)) = g(b) = a$ से $gof = I_A$ प्राप्त होता है। इसके अनुसार, f एक व्युत्क्रमणीय फलन है।

इस परिणाम का विलोम भी सत्य है।

उदाहरण 30 यदि $f : A \to B$ एक व्युत्क्रमणीय फलन है, तब f एकैकी और आच्छादक है।

हल चूँकि $f : A \to B$ एक व्युत्क्रमणीय फलन है, एक फलन $g : B \to A$ का ऐसा अस्तित्व है कि $gof = I_A$, $fog = I_B$. मान लीजिए $f(x) = f(y)$. तब $g(f(x) = g(f(y))$. इस प्रकार, $(gof)(x) = (gof)(y)$. इसलिए, $x = y$ क्योंकि $gof = I_A$. इस प्रकार f एकैकी है। मान लीजिए $b \in B$ है, तब $g(b) \in A$. मान लीजिए $g(b) = a$. इस प्रकार, $f(g(b)) = f(a)$ है. अतः $(fog)(b) = f(a)$। लेकिन $fog = I_B$ है। इसलिए $b = f(a)$.इस प्रकार, f आच्छादक है।

उदाहरण 31 मान लीजिए $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x + 2$ से परिभाषित, है। दिखाइए कि f व्युत्क्रमणीय है। $f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ज्ञात कीजिए।

हल हम दर्शाते है कि f एकैकी आच्छादक है। मान लीजिए $f(x) = f(y)$ है। इसलिए, $3x + 2 = 3y + 2$, से प्राप्त होता है कि $x = y$। इसलिए f एकैकी है। मान लीजिए $x \in \mathbf{R}$, तब x का पूर्व प्रतिबिम्ब $\frac{x}{3} - \frac{2}{3} \in \mathbf{R}$, है। अतः f आच्छादक है। इसलिए, f व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ का अस्तित्व है ताकि $gof = I_{\mathbf{R}}$. इसलिए, सभी $x \in \mathbf{R}$ के लिए, $(gof)(x) = x$. इस प्रकार, $g(f(x)) = x$ का अर्थ है कि $g(3x + 2) = x$. मान लीजिए $y = 3x + 2$. तब $g(y) = \frac{y-2}{3}$ और $g = f^{-1}$.

प्रश्नावली 2.4

1. मान लीजिए $A = \{3,4,5,6\}$, $B = \{13,14,15,16\}$ और $C = \{23,24,25\}$ है। मान लीजिए $f : A \to B$ और $g : B \to C$, क्रमशः $f = \{(3,13), (4,14), (5,15), (6,16)\}$ और $g = \{(13,23), (14,23), (15,24), (16,25)\}$ द्वारा परिभाषित है तो $gof : A \to C$ ज्ञात कीजिए।

2. मान लीजिए कि $A = \{1,2,3,4\}$ तथा $f = \{(1,4), (2,1), (3,3), (4,2)\}$ और $g = \{(1,3), (2,1), (3,2), (4,4)\}$ है। ज्ञात कीजिए (i) fog (ii) gof (iii) fof

3. मान लीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ से परिभाषित है तो $fof : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ज्ञात कीजिए।

4. मान लीजिए कि $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 3x + 1$, $g(x) = 2x-3$ द्वारा परिभाषित हैं, तो ज्ञात कीजिए :

   (i) fog (ii) gof (iii) fof (iv) gog.

5. मान लीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + 1$ द्वारा तथा $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x - 1$ से परिभाषित हैं, तो दिखाइए कि $fog = gof = I_{\mathbf{R}}$.

6. मान लीजिए कि सभी $n \in \mathbf{Z}$ के लिए, क्रमशः $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ और $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(n) = 3n$, तथा

$$g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{3}, \text{ यदि } n, 3 \text{ का गुणक है।} \\ \\ 0, \text{ यदि } 3 \text{ का गुणक नहीं है।} \end{cases}$$

   द्वारा परिभाषित हैं। तो दिखाइए कि $gof = I_{\mathbf{Z}}$ और $fog \neq I_{\mathbf{Z}}$.

7. मान लीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ और $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, क्रमशः $f(x) = x^2$ और $g(x) = x + 1$ द्वारा परिभाषित हैं तो दिखाइए कि $gof \neq fog$.

8. यदि $f : A \to B$, $g : B \to C$ आच्छादक फलन हैं। दिखाइए कि gof एक आच्छादक फलन है।

9. मान लीजिए कि $f : A \to B$ और $g : B \to A$, $fog = I_B$ को संतुष्ट करते हैं। दिखाइए कि f आच्छादक है और g एकैकी है।

10. मान लीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - 7$ द्वारा परिभाषित है। दिखाइए कि f व्युत्क्रमणीय है। $f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ज्ञात कीजिए।

2.6 द्विआधारी संक्रियाएँ (Binary Operations)

हम पहले ही संख्याओं के योग और गुणन की संक्रियाएँ, समुच्चयों के सम्मिलन और सर्वनिष्ठ की संक्रियाएं तथा दो फलनों के संयोजन की संक्रिया पढ़ चुके हैं। इससे हम निम्नलिखित परिभाषा की ओर अग्रसर होते हैं।

परिभाषा 14 मान लीजिए A एक अरिक्त समुच्चय है। A पर एक द्विआधारी संक्रिया '$*$' $A \times A$ से A में फलन है। $x \in A, y \in A$ के लिए $*(x, y)$ लिखने के स्थान पर, हम $x * y$ लिखते हैं। दूसरे शब्दों में, A पर एक द्विआधारी संक्रिया '$*$' एक नियम है जो एक युग्म $x, y \in A$ के संगत एक और अवयव $x * y \in A$ नियत करती है। **Z** में योग '+', **Z** पर एक द्विआधारी संक्रिया है। इसी प्रकार, **Z** में गुणा '.', **Z** पर एक द्विआधारी संक्रिया है। किन्तु प्राकृत संख्याओं के समुच्चय **N** में घटाव '–', **N** पर द्विआधारी संक्रिया नहीं है जैसे $3 \in \mathbf{N}, 7 \in \mathbf{N}$ लेकिन $3 - 7 \notin \mathbf{N}$.

यदि समुच्चय A पर '$*$' एक द्विआधारी संक्रिया है, तो हम यह भी कहते हैं कि A, '$*$' के सापेक्ष संवृत (closed) है। विषम पूर्णांकों का समुच्चय O, पूर्णांकों के जोड़ के सापेक्ष संवृत नहीं है जैसे $1 \in O, 3 \in O$ लेकिन $1 + 3 \notin O$.

यदि '$*$' A पर एक द्विआधारी संक्रिया है, तब $(A, *)$, समुंच्चय A द्विआधारी संक्रिया '$*$' के साथ निरूपित करता है। $(A, *)$ पर विचार कीजिए।

परिभाषा 15 $(A, *)$ साहचर्य कहलाती है यदि सभी $x, y, z \in A$ के लिए, $(x*y)*z = x*(y*z)$

परिभाषा 16 $(A, *)$ क्रमविनिमय कहलाती है यदि सभी $x, y \in A$ के लिए, $x*y = y*x$

Z पर द्विआधारी संक्रिया योग '+' साहचर्य और क्रम विनिमेय दोनों है। किन्तु **Z** पर द्विआधारी संक्रिया '–' न तो साहचर्य है और न ही क्रम विनिमेय है, जैसे $(3-2)-1 \neq 3-(2-1)$ और $3 - 2 \neq 2 - 3$.

उदाहरण 32 मान लीजिए A एक से अधिक अवयवों का समुच्चय है। मान लीजिए '$*$' एक द्विआधारी संक्रिया $a*b = a$, $a, b \in A$ से परिभाषित है। क्या $(A, *)$ साहचर्य या क्रम विनिमय है?

हल चूँकि A में एक से अधिक अवयव हैं, मान लीजिए $a, b \in A$, $a \neq b$ है। तब $a*b = a$, $b*a = b$ अतः $a*b \neq b*a$ है। इसलिए, $(A, *)$ क्रम विनिमय नहीं है।यद्यपि सभी $a, b, c \in A$ के लिए, $(a*b)*c = a*c = a$ और $a*(b*c) = a*b = a$ से प्राप्त होता है कि सभी $a, b, c \in A$ के लिए $(a*b)*c = a*(b*c)$, इसलिए $(A, *)$ साहचर्य है।

उदाहरण 33 मान लीजिए, प्राकृत संख्याओं के समुच्चय **N** पर एक द्विआधारी संक्रिया '$*$' इस प्रकार परिभाषित है कि $a * b = a^b$, $a, b \in \mathbf{N}$. क्या $(\mathbf{N}, *)$ साहचर्य या क्रम विनिमय है ?

हल हम देखते हैं कि :

$$(2*2)*3 = 2^2*3 = 4*3 = 4^3 = 64$$

और $$2*(2*3) = 2*2^3 = 2*8 = 2^8 = 256$$

इसलिए, $(\mathbf{N}, *)$ साहचर्य नहीं है।

तथा $2*3 = 2^3 = 8$ और $3*2 = 3^2 = 9$.

इसलिए, $(\mathbf{N}, *)$ क्रमविनिमय भी नहीं है।

परिभाषा 17 $(A, *)$ पर विचार कीजिए। यदि $e \in A$ का ऐसा अस्तित्व है ताकि सभी $a \in A$ के लिए $a*e = e*a = a$ हो, तब e को A का तत्समक अवयव (*identity element*) कहते हैं।

यदि $e, e' \in A$, $(A, *)$ के तत्समक अवयव हैं, तब $e*e' = e'$ क्योंकि e एक तत्समक अवयव है और $e*e' = e$ क्योंकि e' एक तत्समक अवयव है। इस प्रकार, $e = e'$। इसलिए, $(A, *)$ में तत्समक अवयव, का यदि अस्तित्व है, तो वह अद्वितीय है।

उदाहरण 34 **Q** पर द्विआधारी संक्रिया '$*$' इस प्रकार परिभाषित है कि $a*b = a + b - ab$, $a, b \in \mathbf{Q}$ तो $(\mathbf{Q}, *)$ का तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $e \in \mathbf{Q}$, $(\mathbf{Q}, *)$ का एक तत्समक अवयव है। तब सभी $a \in \mathbf{Q}$ के लिए, $a*e = a$ से प्राप्त होता है कि सभी $a \in \mathbf{Q}$ के लिए, $a + e - ae = a$. अतः सभी $a \in \mathbf{Q}$ के लिए, $e(1-a) = 0$. इसलिए, $e = 0$. अब, सभी $a \in \mathbf{Q}$ के लिए, $a*0 = a + 0 + a.0 = a$ तथा $0*a = 0 + a - a.0 = a$ है। इसलिए, $(\mathbf{Q}, *)$ का '0' एक तत्समक अवयव है।

उदाहरण 35 दिखाइए कि उदाहरण 32 में $(A, *)$ का कोई तत्समक अवयव नहीं है।

हल मान लीजिए $e \in A$, $(A, *)$ का एक तत्समक अवयव है तथा A में $a (\neq e)$ कोई अवयव हैं। तब $*$ की परिभाषा से $e*a = e$. लेकिन e, $(A, *)$ का एक तत्समक अवयव है जिसका अर्थ है कि $e*a = a \neq e$ है। इस प्रकार $(A, *)$ का कोई तत्समक अवयव नहीं है।

परिभाषा 18 मान लीजिए कि $(A, *)$ का एक तत्समक अवयव e है। तथा $a \in A$ है। तब a एक व्युत्क्रमणीय अवयव (*invertible element*) कहलाता है यदि $b \in A$ का एक ऐसा अस्तित्व हो ताकि $a*b = e = b*a$. अवयव b को a का प्रतिलोम (*inverse*) कहते हैं।

यदि $b, c \in A$, $a \in A$ के प्रतिलोम अवयव हैं, तब $b = b*e = b*(a*c) = (b*a)*c = e*c = c$। यदि $(A, *)$ साहचर्य है तो $a \in A$ का प्रतिलोम अद्वितीय रूप से ज्ञात होता है। इसको a^{-1} से निरूपित किया जाता है।

यदि $(A, *)$ साहचर्य और a व्युत्क्रमणीय है, तब $(a^{-1})^{-1} = a$ अर्थात्, एक अवयव के प्रतिलोम का प्रतिलोम स्वयं अवयव है, जब कभी $(A, *)$ साहचर्य है।

उदाहरण 36 उदाहरण 34 में, $(\mathbf{Q}, *)$ के कौन से अवयव प्रतिलोमी हैं ?

हल मान लीजिए कि $a \in \mathbf{Q}$ व्युत्क्रमणीय है। तब $b \in \mathbf{Q}$ का अस्तित्व है ताकि $a*b = 0$. इसलिए $a + b - ab = 0$ से प्राप्त है, $b = \frac{a}{a-1}$. अतः यदि $a \neq 1$ हो तब a का प्रतिलोम $\frac{a}{a-1}$ है तथा $1 \in \mathbf{Q}$ का प्रतिलोम नहीं है क्योंकि यदि b, 1 का प्रतिलोम है, तब $1*b = 0$ से प्राप्त है $1 + b - b = 0$. इसलिए, $1 = 0$ जो कि सम्भव नहीं है। इसलिए, 1 को छोड़कर, प्रत्येक अवयव $a \in \mathbf{Q}$ का प्रतिलोम है।

एक द्विआधारी संक्रिया को एक सारणी के रूप में लिखना कभी—कभी सुविधाजनक हो जाता है। मान लीजिए A पर '$*$' एक द्विआधारी संक्रिया है जो $a*a = a$, $b*b = b$, $a*b = b$, $b*a = a$ से परिभाषित है। तब A पर परिभाषित द्विआधारी संक्रिया को एक सारणी के रूप में निम्नप्रकार से लिखा जा सकता है :

$*$	a	b
a	a	b
b	a	b

उदाहरण 37 मान लीजिए $A = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$. मान लीजिए A पर '$*$' एक द्विआधारी संक्रिया है जो इस प्रकार परिभाषित है :

$$(a, b) * (c, \mathrm{d}) = (ac, a\mathrm{d} + b)$$

तब

(i) (A, $*$) का तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए।

(ii) (A, $*$) का व्युत्क्रमणीय अवयव ज्ञात कीजिए।

हल (i) मान लीजिए कि (A, $*$) का तत्समक अवयव (x, y) है। तब सभी $a \in \mathbf{Q}, b \in \mathbf{Q}$ के लिए, $(a, b) * (x, y) = (a, b)$. इसलिए $(ax, a\mathrm{y} + b) = (a, b)$ जिससे से प्राप्त है $ax = a$, $ay + b = b$. अतः सभी $a \in \mathbf{Q}$ के लिए, $ax = a, ay = 0$. $a = 1$ लीजिए, तब $x = 1, y = 0$ हैं। अब सभी $a \in \mathbf{Q}, b \in \mathbf{Q}$ के लिए, $(a, b) * (1,0) = (a, b)$ तथा $(1, 0) * (a, b) = (a, 1.b + 0) = (a, b)$. इस प्रकार (1,0), A का एक तत्समक अवयव है।

(ii) मान लीजिए कि $(a, b) \in$ A व्युत्क्रमणीय है। तब $(c, d) \in$ A का अस्तित्व है ताकि $(a, b) * (c, d) = (1,0) = (c, d) * (a, b)$. इस प्रकार, $(ac, ad + b) = (1,0)$, जिससे प्राप्त होता है $ac = 1$, $ad + b = 0$. इसलिए, यदि $a \neq 0$, $c = \frac{1}{a}$, $d = -\frac{b}{a}$. यह आसानी से देखा जा सकता है कि $\left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}\right) * (a,b) = (1,0)$ है। इस प्रकार $(a,b)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}\right)$ यदि $a = 0$ है तब $(0,b)$ व्युत्क्रमणीय नहीं है क्योंकि यदि $(0,b)$ व्युत्क्रमणीय है तो $(c, d) \in$ A का ऐसा अस्तित्व है ताकि $(0,b) * (c, d) = (1,0)$। इसलिए $(0,b) = (1,0)$, जो कि अमान्य है। इस प्रकार A के अवयव (a, b) व्युत्क्रमणीय हैं, $a \neq 0$ और $(a,b)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}\right)$.

प्रश्नावली 2.5

1. मान लीजिए कि **N** पर एक द्विआधारीय संक्रिया '$*$' इस प्रकार है कि

$a*b = l.c.m.\ (a, b),\ a, b \in \mathbf{N}$

(i) $2*4,\ 3*5,\ 1*6$ ज्ञात कीजिए।

(ii) क्या $(\mathbf{N}, *)$ साहचर्य है?

(iii) क्या $(\mathbf{N}, *)$ क्रमविनिमेय है?

(iv) $(\mathbf{N}, *)$ का तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए।

(v) $(\mathbf{N}, *)$ के कौन से अवयव व्युत्क्रमणीय हैं? उनको ज्ञात कीजिए।

2. माना कि **Q** पर एक द्विआधारीय संक्रिया '$*$' परिभाषित है। बताइए कौन सी द्विआधारीय संक्रियाएँ क्रम विनिमेय हैं?

(i) $a*b = a - b,\ a,b \in \mathbf{Q}$

(ii) $a*b = a^2 + b^2,\ a,b \in \mathbf{Q}$

(iii) $a*b = a + ab,\ a,b \in \mathbf{Q}$

(iv) $a*b = (a-b)^2,\ a,b \in \mathbf{Q}$

3. माना कि **Q** पर एक द्विआधारीय संक्रिया '$*$' परिभाषित है। बताइए कौन सी द्विआधारीय संक्रियाएँ साहचर्य हैं?

(i) $a*b = a - b,\ a, b \in \mathbf{Q}$

(ii) $a*b = \frac{ab}{4},\ a, b \in \mathbf{Q}$

(iii) $a*b = a - b + ab,\ a,b \in \mathbf{Q}$

(iv) $a*b = ab^2,\ a,b \in \mathbf{Q}$

4. मान लीजिए कि $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ तथा A पर एक द्विआधारीय संक्रिया '$*$', $(a, b) * (c, d) = (ac, bd)$ से परिभाषित है। दिखाइए कि (i) $(A, *)$ साहचर्य है, (ii) $(A, *)$ क्रम विनिमेय है।

5. मान लीजिए कि $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, तथा A पर एक द्विआधारीय संक्रिया '$*$', $(a,b) * (c,d) = (a+c, b+d)$ से परिभाषित है। दिखाइए कि (i) $(A, *)$ साहचर्य है, (ii) $(A, *)$ क्रम विनिमेय है, (iii) $(A, *)$ का तत्समक अवयव यदि कोई है, तो ज्ञात कीजिए।

6. मान लीजिए कि $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, तथा A पर एक द्विआधारीय संक्रिया '$*$', $(a,b) * (c,d) = (ad+bc, bd)$ से परिभाषित है। दिखाइए कि (i) $(A, *)$ साहचर्य है। (ii) $(A, *)$ का कोई तत्समक अवयव नहीं है, (iii) क्या $(A, *)$ क्रम विनिमेय है?

विविध उदाहरण

उदाहरण 38 मान लीजिए कि **Q** से **Q** में एक सम्बन्ध, $R = \{(a,b) : a, b \in \mathbf{Q}$ और $a - b \in \mathbf{Z}\}$ परिभाषित है। दिखाइए कि (i) सभी $a \in \mathbf{Q}$ के लिए, $(a,a) \in R$, (ii) $(a,b) \in R$ से $(b,a) \in R$ प्राप्त है (iii) $(a,b) \in R$, $(b,c) \in R$ से $(a,c) \in R$ प्राप्त है।

हल (i) चूँकि $a - a = 0 \in \mathbf{Z}$ सभी $a \in \mathbf{Q}$ के लिए, अतः $(a, a) \in$ R.

(ii) $(a, b) \in$ R का अर्थ है कि $a - b \in \mathbf{Z}$. इस प्रकार $b - a \in \mathbf{Z}$, इसलिए $(b, a) \in$ R.

(iii) $(a, b) \in \mathbf{R}$, $(b, c) \in \mathbf{R}$ का अर्थ है $(a - b) \in \mathbf{Z}$, $(b - c) \in \mathbf{Z}$. इस प्रकार $a - c = (a - b) + (b - c) \in \mathbf{Z}$ इसलिए $(a, c) \in$ R.

उदाहरण 39 मान लीजिए कि $f = \{(1,1), (2,3), (0,-1), (-1,-3)\}$, $\mathbf{Z}$ से $\mathbf{Z}$ में एक फलन कोई पूर्णांक a, b के लिए $f(x) = ax + b$ से परिभाषित है तो a, b ज्ञात कीजिए।

हल $(1, 1) \in f$ का अर्थ है $f(1) = 1$ और $(2, 3) \in f$ का अर्थ है $f(2) = 3$. इस प्रकार, $a + b = 1$ और $2a + b = 3$. इसलिए, $a = 2$ और $b = -1$. तब ध्यान दीजिए कि $f(0) = -1$, $f(-1) = -3$.

उदाहरण 40 मान लीजिए कि A एक परिमित समुच्चय है। यदि f : A $\rightarrow$ A एकैकी है तो दिखाइए कि f आच्छादक है।

हल मान लीजिए कि A = $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ है। चूँकि f एकैकी है, $f(a_1)$, $f(a_2)$, ..., $f(a_n)$, A के भिन्न–भिन्न अवयव हैं। इस प्रकार, A = $\{f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)\}$. मान लीजिए $b \in$ A. तब किसी i के लिए $b = f(a_i)$, $1 \leq i \leq n$. इसलिए f आच्छादक है।

उदाहरण 41 मान लीजिए कि A दो धन पूर्णांकों का एक समुच्चय है। तथा f: A $\rightarrow \mathbf{Z}$ एक फलन $f(n) = p$ से परिभाषित है जहाँ p, n का सब से बड़ा अभाज्य गुणनखण्ड है। मान लीजिए कि f का परिसर = $\{3\}$. A को ज्ञात कीजिए। क्या A अद्वितीय रूप से निर्धारित हो जाता है?

हल मान लीजिए कि A = $\{n, m\}$. तब $f(n) = 3 = f(m)$ है क्योंकि f का परिसर = $\{3\}$ है। तब n को 3 और m को 6 लिया जा सकता है। इसलिए, A = $\{3, 6\}$ तथा n को 9 और m को 12 भी लिया जा सकता है। इस प्रकार, A = $\{9, 12\}$. अतः A अद्वितीय रूप से निर्धारित नहीं है।

उदाहरण 42 मान लीजिए कि, f : $\mathbf{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbf{N} \cup \{0\}$,

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{यदि } n \text{ सम है।} \\ n-1, & \text{यदि } n \text{ विषम है।} \end{cases}$$

से परिभाषित है तो दिखाइए कि f एकैकी आच्छादिक है।

हल मान लीजिए कि $f(n) = f(m)$. स्थिति (i) n, m दोनों सम हैं, तब $n + 1 = m + 1$ से प्राप्त है $n = m$. स्थिति (ii) n, m दोनों विषम हैं, तब $n-1 = m-1$ से प्राप्त है $n = m$. स्थिति (iii) n सम है, m विषम है, तब $f(n)$ विषम है, और $f(m)$ सम है, इस प्रकार $f(n) \neq f(m)$. प्रत्येक स्थिति में, $f(n) = f(m)$ से प्राप्त है कि $n = m$. इस प्रकार, f एकैकी है। अब सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए, $f(2n) = 2n + 1$, $f(2n + 1) = 2n$ हैं। इस प्रकार f आच्छादक है। अतः f एकैकी आच्छादक फलन है।

उदाहरण 43 मान लीजिए कि $A = \{1,2\}$. A से A तक सभी एकैकी फलन ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $f: A \to A$, एक एकैकी फलन है। तब $f(1)$ के दो ही विकल्प हैं, नामतः 1 या 2. इस प्रकार $f(1) = 1$ या $f(1) = 2$. यदि $f(1) = 1$, तो $f(2) = 2$ होगा क्योंकि f एकैकी है। यदि $f(1) = 2$, तो $f(2) = 1$. इस प्रकार, A से A तक दो एकैकी फलन $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ और $g(1) = 2$, $g(2) = 1$ परिभाषित हैं।

उदाहरण 44 मान लीजिए $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(x) = x + 2$ से परिभाषित है। $g: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ ज्ञात कीजिए जबकि $gof = I_Z$.

हल $gof = I_Z$ से प्राप्त है कि सभी $x \in \mathbf{Z}$ के लिए, $(gof)(x) = x$ है। इस प्रकार, $g(f(x)) = x$. इसलिए सभी $x \in \mathbf{Z}$ के लिए, $g(x + 2) = x$. मान लीजिए कि $y = x + 2$. तब $g(y) = y - 2$. इस प्रकार, $g: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $g(x) = x - 2$ से परिभाषित अभीष्ट फलन है।

उदाहरण 45 मान लीजिए $f: A \to B$, $g: B \to C$, दो फलन हैं। मान लीजिए $gof: A \to C$ एकैकी है और f आच्छादक है। दिखाइए कि g एकैकी है।

हल मान लीजिए सभी $x, y \in B$ के लिए $g(x) = g(y)$ है। $x \in B$ का अर्थ है $x' \in A$ का ऐसा अस्तित्व है ताकि $f(x') = x$, क्योंकि f आच्छादक है। इसी प्रकार, $y' \in A$ का ऐसा अस्तित्व है ताकि $f(y') = y$. इस प्रकार, $g(f(x') = g(f(y'))$. चूँकि gof एकैकी है इसलिए $x' = y'$. इसलिए, $f(x') = f(y')$ है अर्थात् $x = y$. इस प्रकार, g एकैकी है।

उदाहरण 46 मान लीजिए कि $f: A \to A$. यदि $fof = I_A$ हो तो दिखाइए कि f व्युत्क्रमणीय है और $f = f^{-1}$ है।

हल हम जानते हैं कि यदि $fog = I_A$ और $gof = I_A$ हो, तब f व्युत्क्रमणीय है और $g = f^{-1}$. चूँकि $fof = I_A$ इसलिए f व्युत्क्रमणीय है और $f = f^{-1}$.

उदाहरण 47 मान लीजिए कि A एक अरिक्त समुच्चय है। मान लीजिए A के घात समुच्चय P(A) पर एक द्विआधारी संक्रिया '$*$', $X, Y \in P(A)$ के लिए $X * Y = X \cup Y$ से परिभाषित है। (i) $(P(A), *)$ के लिए तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए, (ii) दिखाइए कि $\phi \in P(A)$ ही केवल $(P(A), *)$ का व्युत्क्रमणीय अवयव है।

हल (i) चूँकि सभी $X \in P(A)$ के लिए, $X \cup \phi = X = \phi \cup X$ है, इसलिए सभी $X \in P(A)$ के लिए, $X * \phi = X = \phi * X$. इस प्रकार, $\phi \in P(A)$, $(P(A), *)$ का तत्समक अवयव है। (ii) मान लीजिए कि $X \in P(A)$ व्युत्क्रमणीय है। तब, $Y \in P(A)$ का ऐसा अस्तित्व है ताकि $X * Y = \phi = Y * X$. इस प्रकार, $X \cup Y = \phi = Y \cup X$ है। इसलिए, $X = Y = \phi$. इस प्रकार, $\phi \in P(A)$ ही केवल $(P(A), *)$ का व्युत्क्रमणीय अवयव है।

अध्याय 2 पर विविध प्रश्नावली

1. मान लीजिए R, **N** से **N** में एक परिभाषित सम्बन्ध $R = \{(a,b) : a,b \in \mathbf{N}$ और $a = b^2\}$ है। क्या निम्नलिखित सत्य हैं ?
   (i) सभी $a \in \mathbf{N}$ के लिए, $(a,a) \in R$.
   (ii) $(a,b) \in R$ से निष्कर्ष निकलता है कि $(b,a) \in R$.
   (iii) $(a,b) \in R, (b,c) \in R$ से निष्कर्ष निकलता है कि $(a,c) \in R$? अपने उत्तर का औचित्य बताइए।

2. मान लीजिए कि $f = \{(1,1), (2,3), (3,5), (4,7)\}$, **Z** से **Z** में एक फलन, किन्हीं पूर्णांकों a,b के लिए $f(x) = ax+b$ द्वारा परिभाषित है। a,b ज्ञात कीजिए।

3. मान लीजिए $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,5,9,11,15,16\}$ और $f = \{(1,5), (2,9), (3,1), (4,5), (2,11)\}$ हैं। क्या निम्नलिखित सत्य है?
   (i) f, A से B में एक संबंध है।
   (ii) f, A से B में एक फलन है ? अपने उत्तर का औचित्य बताइए।

4. मान लीजिए कि f, $\mathbf{Q} \times \mathbf{Z}$ का उपसमुच्चय है और $f = \{(\frac{m}{n}, m) : m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\}$ से परिभाषित है। क्या f, **Q** से **Z** में एक फलन है? अपने उत्तर का औचित्य बताइए।

5. मान लीजिए कि f, $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ का उपसमुच्चय है, $f = \{(ab, a+b) : a, b \in \mathbf{Z}\}$ से परिभाषित है। क्या f, **Z** से **Z** में एक फलन है? अपने उत्तर का औचित्य बताइए।

6. मान लीजिए कि A परिमित समुच्चय है तथा $f : A \to A$ आच्छादक है, दिखाइए f एकैकी है।

7. मान लीजिए कि $A = \{9, 10, 11, 12, 13\}$ है। मान लीजिए $f : A \to \mathbf{N}$, $f(n) = n$ का सबसे बड़ा अभाज्य गुणनखण्ड है, द्वारा परिभाषित है। f का परिसर ज्ञात कीजिए।

8. मान लीजिए कि $f : \mathbf{N} - \{1\} \to \mathbf{N}$, $f(n) = n$ का सबसे बड़ा अभाज्य गुणनखण्ड है, द्वारा परिभाषित है, दिखाइए कि f न तो एकैकी है और न आच्छादक ही है। f का परिसर ज्ञात कीजिए।

9. मान लीजिए कि $A \subseteq \mathbf{N}$ और $f : A \to A$, $f(n) = p$, n का सबसे बड़ा अभाज्य गुणनखण्ड है जबकि f का परिसर A है, द्वारा परिभाषित है। A को ज्ञात कीजिए।

10. मान लीजिए कि $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$.

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{यदि } n \text{ विषम है।} \\ n-1, & \text{यदि } n \text{ सम है।} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। दिखाइए कि f एकैकी आच्छादक फलन है।

11. मान लीजिए कि $A = \{1,2,3\}$. है तो A से A में सभी एकैकी फलन ज्ञात कीजिए।

12. मान लीजिए कि $f : \mathbf{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbf{N} \cup \{0\}$,

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{यदि } n \text{ सम है।} \\ n-1, & \text{यदि } n \text{ विषम है।} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। दिखाइए कि f व्युत्क्रमणीय है और $f = f^{-1}$.

13. फलन $f(x) = \begin{cases} 1, x > 0, & \text{के लिए} \\ 0, x = 0 & \text{के लिए} \\ -1, x < 0 & \text{के लिए} \end{cases}$ $x \in \mathbf{R}$ का आलेख खींचिए।

14. मान लीजिए कि $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, $f(x) = 2x$ से परिभाषित है। $g : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ ज्ञात कीजिए यदि $gof = I_{\mathbf{Z}}$.

15. मान लीजिए कि $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{यदि } x \text{ सम है।} \\ x+1, & \text{यदि } x \text{ विषम है।} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। क्या $g : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ का कोई ऐसा अस्तित्व है ताकि $fog = I_{\mathbf{Z}}$?

16. मान लीजिए कि $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ दो ऐसे फलन हैं कि $gof : A \rightarrow C$. दिखाइए कि :

(i) यदि gof आच्छादक है तो g आच्छादक है।

(ii) यदि gof एकैकी है तो f एकैकी है।

(iii) यदि gof आच्छादक है और g एकैकी है तो f आच्छादक है।

17. मान लीजिए कि $f : A \rightarrow A$ ऐसा है कि $fof = f$. दिखाइए कि f आच्छादक है यदि और केवल यदि f एकैकी है। इस स्थिति में f निकालिए।

18. मान लीजिए कि A एक अरिक्त समुच्चय है, तथा A के घात समुच्चय P(A) पर एक द्विआधारीय संक्रिया '$*$', $X, Y \in P(A)$ के लिए $X * Y = X \cap Y$ द्वारा परिभाषित है।

(i) $(P(A), *)$ का तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए।

(ii) दिखाइए कि $(P(A), *)$ का केवल $A \in P(A)$ ही व्युत्क्रमणीय अवयव है।

19. मान लीजिए कि A एक अरिक्त समुच्चय है। मान लीजिए, A के घात समुच्चय P(A) पर एक द्विआधारीय संक्रिया '$*$' $X, Y \in P(A)$ के लिए $X * Y = (X - Y) \cup (Y - X)$ से परिभाषित है।

(i) दिखाइए कि $\phi \in P(A)$, $(P(A), *)$ का तत्समक अवयव है।

(ii) दिखाइए कि सभी $X \in P(A)$ के लिए, X व्युत्क्रमणीय है और $X = X^{-1}$.

20. मान लीजिए कि $A = \{a, b\}$. A पर द्विआधारीय संक्रियाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

समुच्चय की संकल्पना की भाँति फलन की संकल्पना भी एक लम्बे समय-अन्तराल में विकसित हुई। यह विश्वास किया जाता है कि आर. डेकार्टेज (R. Descartes), (1596-1650 ई.) ने 1637 ई. में शब्द 'फलन' से परिचय कराया जब उन्होंने इसको एक चर राशि x की पूर्णांक घात x^n के अर्थ में प्रयोग किया था। फलन की एक स्पष्ट परिभाषा जेम्स ग्रेगरी (James Gregory), (1638-1675 ई.) ने अपनी कृति "वेरा सर्कुलियट हाइपरबोलेट क्वाड्रेचूरिया (Vera Circuliet Hyperbolate Quadraturia)", 1667 ई. में प्रस्तुत की। उन्होंने इसे अनेक राशियों से बीजीय संक्रियाओं के उत्तरोत्तर प्रयोग से या अन्य संक्रियाओं से प्राप्त राशि के रूप में परिभाषित किया। कुछ समय बाद जी.डब्ल्यू. लैबनीज (G.W. Leibnitz), (1646-1716 ई.) ने 1673 ई. की पाण्डुलिपि में शब्द 'फलन' को किसी राशि के अर्थ में प्रयोग किया जो वक्र के एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक इस प्रकार परिवर्तित होती रहती है जैसे एक वक्र पर बिन्दु के निर्देशांक, वक्र की ढाल, वक्र के एक बिन्दु पर स्पर्शी तथा अभिलम्ब परिवर्तित होते हैं किन्तु अपनी कृति हिस्टोरिआ (Historia), (1714 ई.) में लैबनीज ने शब्द 'फलन' को एक चर पर आधारित राशि के रूप में प्रयोग किया। वाक्यांश 'x का फलन' प्रयोग में लाने वाले वह सर्वप्रथम व्यक्ति थे। एल. आयलर (L. Euler), (1707-1783 ई.) ने फलन को अचर एवं चरों से युक्त सूत्र या समीकरण के रूप में व्यक्त किया। आयलर ने 1734 ई. में प्रतीक $f(x)$ का अभ्युदय किया। उनकी फलन की संकल्पना जोसेफ फोरियर (Joseph Fourier), (1768-1830 ई.) के उस समय तक प्रचलित रही जब उन्होंने उष्मा संचरण की समस्या के अनुसंधान करते समय फलन की परिभाषा प्रस्तुत की जो पूर्ववर्ती संबंधों को अधिक व्यापक रूप से व्यक्त करती थी। अन्तिम रूप से, लेज्यूने डिरिचलेट (Lejeunne Dirichlet), (1805-1859 ई.) ने फलन की जो परिभाषा दी वही वर्तमान में प्रचलित है। फलन की समुच्चय सैद्धान्तिक परिभाषा जार्ज केन्टर (Georg Cantor), (1845-1918 ई.) द्वारा समुच्चय सिद्धान्त के विकास के बाद प्रचलित हुई।

गणितीय आगमन (MATHEMATICAL INDUCTION)

अध्याय 3

3.1 भूमिका

वैज्ञानिक निष्कर्षों को प्राप्त करने के लिए सामान्यत: प्रयोग में आने वाली दो तर्क संगत विधियाँ हैं। एक **निगमन** (Deduction) विधि है अर्थात व्यापक कथन से विशिष्ट कथन प्राप्त करने की तर्क विधि और दूसरी **आगमन** (Inducton) विधि है जो विशिष्ट स्थिति से व्यापक की ओर ले जाती है। शब्द **'आगमन'** का अर्थ है विशिष्ट स्थितियों के आधार पर निष्कर्ष रूप में व्यापक कथन प्राप्त करने की तर्क विधि। आगमन का प्रारम्भ निरीक्षण से होता है। हम देखते हैं और अन्त:प्रेरणा के द्वारा एक अस्थायी (tentative) निष्कर्ष पर आ पहुँचते हैं जिसे अनुमानित कथन (conjecture) भी कहते हैं। यह सत्य भी हो सकता है परन्तु इसे तर्क–संगत प्रक्रिया द्वारा प्रमाणित भी होना चाहिए। अन्यथा यह असत्य भी हो सकता है, परन्तु तब इसे प्रति–उदाहरण (counter example) द्वारा दर्शाना भी चाहिए कि अनुमानित कथन असत्य है।

बीजगणित या गणित की अन्य शाखाओं में कुछ ऐसे परिणाम या कथन हैं जो एक धन पूर्णांक n के पदों में व्यक्त किए जाते हैं। ऐसे कथनों को सिद्ध करने के लिए विशिष्ट तकनीक पर आधारित समुचित विधि है, जिसे **गणितीय आगमन का सिद्धान्त** (Principle of Mathematical Induction) कहते हैं।

3.2 आगमन के लिए तैयारी

सुसंगत (pertinent) प्रश्न है कि "एक कथन कहने पर, उसकी सार्थकता की सत्यता या असत्यता कैसे स्थापित की जाये।" इस प्रश्न के उत्तर देने के प्रयास से पूर्व हम आगमन तर्क या आगमन के प्रयोग के कुछ उदाहरणों का अध्ययन करते हैं।

उदाहरण 1 हम जानते हैं कि संख्याएँ 13, 23, 43, 53, 73 आदि अभाज्य (prime) संख्याएँ हैं जब कि संख्याएँ 33, 63, 93 आदि सभी भाज्य (composite) संख्याएँ हैं। इन विशिष्ट स्थितियों से हम एक व्यापक (general) कथन प्राप्त कर सकते हैं अर्थात् प्राकृत संख्या n के लिए "$(10\,n + 3)$ एक अभाज्य संख्या है, यदि n, 3 से भाज्य नहीं है"।

यह कथन प्राकृत संख्या n पर आधारित है। हम इस कथन को $P(n)$ से प्रदर्शित करते हैं अर्थात् $P(n) : (10n + 3)$ अभाज्य संख्या है यदि n, 3 से भाज्य नहीं है। क्या यह कथन सत्य है? उत्तर है कि यह कथन $n = 14$ के लिए सत्य नहीं है क्योंकि हम जानते हैं कि संख्या 143 अभाज्य नहीं है। परन्तु 143 को $n = 14$ के लिए $10n + 3 = 10\ (14) + 3 = 143$ के रूप में लिखा जा सकता है जब कि 14 स्पष्टतः 3 से भाज्य नहीं है।

उदाहरण 2 मान लीजिए $P(n)$ कथन "$2^n > 1$" है। क्या $P(1)$ सत्य है?

हल $P(1)$ कथन "$2^1 > 1$" है जो कि सत्य है।

उदाहरण 3 यदि $P(n)$ कथन है "$n\ (n + 1)$ सम (Even) है जब कि n धन पूर्णांक है", तो $P(5)$ क्या है?

हल $P(n) : n\ (n + 1)$ सम है।

अब $n = 5$ के लिए $P(5)\ : 5 \times 6 = 30$ एक सम संख्या है।

उदाहरण 4 मान लीजिए $P(n)$ कथन है "$(10n + 3)$ अभाज्य है", क्या $P(3)$ सत्य है?

हल कथन $P(3)$: "$(10 \times 3 + 3) = 33$ अभाज्य है", जो कि सत्य नहीं है।

उदाहरण 5 मान लीजिए $P(n)$ कथन '$4^n > n$' है। यदि $P(n)$ सत्य है तो सिद्ध कीजिए कि $P(n + 1)$ सत्य है।

हल ज्ञात है कि $P\ (n) : 4^n > n$ सत्य है,

तो हमें सिद्ध करना है कि $P\ (n + 1) : 4^{(n+1)} > (n + 1)$ सत्य है। (1)

हम (1) का बायाँ पक्ष लेते हैं अर्थात् $4^{(n+1)} = 4^n . 4$ क्योंकि $4^n > n$ है अतः $4^{(n+1)} > 4n$. पुनः प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए, $4n > (n + 1)$ और इस प्रकार यह कथन $P\ (n + 1) : 4^{n+1} > (n + 1)$ सत्य है।

कुछ स्थितियों में भले ही यदि हमारे पास प्रति–उदाहरण न हों तो हम यह निष्कर्ष नहीं निकाल सकते हैं कि व्यापक कथन सभी धन पूर्णांकों के लिए सत्य है क्योंकि हमने कुछ विशिष्ट स्थितियों में इसे सत्य पाया है जिसे प्रमाणित किया जा चुका है। इससे यह प्रश्न उठता है कि कुछ विशिष्ट स्थितियों में किसी व्यापक कथन $P(n)$ की सत्यता ज्ञात हो जाने पर उसको किस प्रकार सिद्ध करते हैं। ऐसे गणितीय कथन जिस विधि के प्रयोग से सत्य सिद्ध किये जा सकते हैं, उसे **गणितीय आगमन** विधि कहते हैं।

3.3 गणितीय आगमन सिद्धान्त

गणितीय आगमन सिद्धान्त के अनुसार :

मान लीजिए $P(n)$ एक कथन है, जिसमें n एक प्राकृत संख्या है ताकि

(i) P(1) सत्य है।

(ii) यदि एक धन पूर्णांक k के लिए P(k) सत्य है तो P(k + 1) भी सत्य है।

तब कथन P(n), प्राकृत संख्या n के सभी मानों के लिए सत्य होता है।

दूसरे शब्दों में, प्राकृत संख्या n के सभी मानों के लिए कथन P(n) सत्य सिद्ध करने के लिए हमें निम्नांकित दो चरणों (steps) का अनुसरण करना चाहिए।

प्रथमतः, हमें P(1) सत्य सिद्ध करना चाहिए।

द्वितीयतः, एक धन पूर्णांक k के लिए जब P(k) सत्य है तो P (k + 1) भी सत्य सिद्ध करना चाहिए।

अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करते हैं :

उदाहरण 6 दिखाइए कि प्राकृत संख्या n के सभी मानों के लिए $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$, 9 से भाज्य है।

हल स्पष्टतः P(n) कथन निम्नांकित है,

P(n) : $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$, 9 से भाज्य है।

प्रथम, हम जाँच करते हैं कि P(n) सत्य है, जब $n = 1$ हो।

इस प्रकार, P(1) : $1^3 + (1 + 1)^3 + (1 + 2)^3 = 36$, जो कि 9 से भाज्य है। और इसलिए $n = 1$ के लिए P(n) सत्य है।

अब कल्पना कीजिए कि धन पूर्णांक k के लिए P(k) सत्य है,

अर्थात् P(k) : $k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3$, 9 से भाज्य है। (1)

तो हम सिद्ध करना चाहेंगे

P (k + 1) : $(k + 1)^3 + (k + 2)^3 + (k + 3)^3$, 9 से भाज्य है,

हम देखते हैं कि

$$(k + 1)^3 + (k + 2)^3 + (k + 3)^3 = (k + 1)^3 + (k + 2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27$$
$$= (k + 1)^3 + (k + 2)^3 + k^3 + 9\,(k^2 + 3k + 3) \quad (2)$$

(1) के अनुसार, $k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3$, 9 से भाज्य है और $9(k^2 + 3k + 3)$, 9 से भाज्य है इसलिए व्यंजक (2), 9 से भाज्य है।

इस प्रकार P (k + 1) सत्य है जब P (k) सत्य हैं अतएव गणितीय आगमन सिद्धान्त से कथन "P(n) : $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$, 9 से भाज्य है।" सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए सत्य है।

उदाहरण 7 दिखाइए कि प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं का योग n^2 है।

हल स्पष्टतः दिया कथन P(n) : $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ है।

हम देखते हैं कि P(1) सत्य है क्योंकि P(1) : $1 = 1^2$ जो कि सत्य है।

अब कल्पना कीजिए कि किसी धन पूर्णांक k के लिए P (k) सत्य है,

अर्थात् $$P(k) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2 \qquad (1)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि P (k + 1) सत्य है, जब P (k) सत्य है।

अर्थात् $$P(k + 1) : 1 + 3 + 5 + \ldots + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2 \qquad (2)$$

हम देखते हैं कि

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1]$$
$$= k^2 + (2k + 1)$$ (क्योंकि (1) से P(k) सत्य है)
$$= (k + 1)^2$$

इस प्रकार P(k) के सत्य होने पर P(k + 1) भी सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से, प्राकृत संख्या n के सभी मानों के लिए P (n) सत्य है।

उदाहरण 8 दिखाइए कि $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n + 1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

हल स्पष्ट है कि

$$P(n) : 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + \ldots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

हम P(1) की सत्यता की जाँच करते हैं।

अर्थात् $$P(1) : 1.2 = \frac{1.2.3}{3} = 2,$$ जो कि सत्य है।

अब, कल्पना कीजिए कि किसी धन पूर्णांक k के लिए P(k) सत्य है,

अर्थात् $$P(k) : 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} \qquad (1)$$

अब हम सिद्ध करना चाहते हैं कि P (k+1) सत्य है जब P(k) सत्य है।

हम देखते हैं

$$P(k+1) : [1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + k(k + 1)] + (k + 1)(k + 2)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$ (1) से

$$= (k + 1)(k + 2)\left(\frac{k}{3} + 1\right)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

इस प्रकार, $P(k)$ के सत्य होने पर $P(k+1)$ भी सत्य है।

इसलिए, गणितीय आगमन सिद्धान्त से प्राकृत संख्या n के सभी मानों के लिए $P(n)$ सत्य है।

उदाहरण 9 दिखाइए कि $2^{3n} - 1$, 7 से भाज्य है।

हल हम लिखते हैं कि $P(n): 2^{3n} - 1$, 7 से भाज्य है।

$n = 1$ के लिए, $P(1): 2^3 - 1 = 7$, 7 से भाज्य है, जो कि सत्य है।

अब कल्पना कीजिए कि धन पूर्णांक $n = k$ के लिए $P(k)$ सत्य है,

अर्थात् $P(k): 2^{3k} - 1$, 7 से भाज्य है (1)

$P(k)$ की सत्यता (1) को मानते हुए हम सिद्ध करना चाहते हैं कि $P(k+1)$ भी सत्य है।

विचार कीजिए, $2^{3(k+1)} - 1 = 2^{3k} \times 2^3 - 1$

या $$2^{3(k+1)} - 1 = 8(2^{3k} - 1) + 7 \quad (2)$$

(2) में दायाँ पक्ष 7 से भाज्य है क्योंकि (1) से $2^{3k} - 1$, 7 से भाज्य है तथा 7 स्वयं से भाज्य है, इस प्रकार $P(k+1)$ सत्य है।

इसलिए, गणितीय आगमन सिद्धान्त द्वारा प्राकृत संख्या n के सभी मानों के लिए

$P(n): 2^{3n}-1$, 7 से भाज्य है, सत्य है।

उदाहरण 10 सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए, सिद्ध कीजिए कि $(1+x)^n \geq (1+nx)$, जब कि $x > -1$

हल हम लिखते हैं $P(n): (1+x)^n \geq (1+nx), x > -1$

$P(n), n = 1$ के लिए, सत्य है क्योंकि $x > -1$ के लिए $P(1): (1+x) \geq (1+x)$, जो कि सत्य है।

अब कल्पना कीजिए कि किसी धन पूर्णांक k के लिए

$P(k): (1+x)^k \geq (1+kx), x > -1$ (1)

सत्य है। हम सिद्ध करना चाहते हैं कि $P(k+1)$ अर्थात्

$P(k+1): (1+x)^{(k+1)} \geq [1+(k+1)x], x > -1$ के लिए सत्य है जब $P(k)$ सत्य है। (2)

सर्वसमिका $(1+x)^{(k+1)} = (1+x)^k \cdot (1+x)$ पर विचार कीजिए

दिया है कि $x > -1$, अतः $(1+x) > 0$ और (1) द्वारा $(1+x)^k \geq (1+kx)$, हम पाते हैं,
$(1+x)^{(k+1)} \geq (1+kx)(1+x)$

अर्थात् $(1 + x)^{(k+1)} \geq (1 + x + kx + kx^2)$ (3)

k प्राकृत संख्या है और $x^2 \geq 0$, अतः $kx^2 \geq 0$,

अतः $(1 + x + kx + kx^2) \geq (1 + x + kx)$,

इस प्रकार हम प्राप्त करते हैं

$(1 + k)^{(k+1)} \geq (1 + x + kx)$

अर्थात् $(1 + x)^{(k+1)} \geq [1 + (1 + k) x]$

अतः कथन (2) स्थापित हुआ।

इस प्रकार, गणितीय आगमन सिद्धान्त से, सभी प्राकृत संख्याओं के लिए $(1+x)^n \geq (1+nx)$, जब $x > -1$, सत्य है।

प्रश्नावली 3.1

1. यदि $P(n)$ कथन है '$n(n+1)(n+2)$, 12 से भाज्य है" तो दिखाइए कि P(3) तथा P(4) सत्य हैं लेकिन P(5) नहीं।

2. यदि $P(n)$ कथन है "$2^n > 3n$" तथा $P(k)$ सत्य है, तो दिखाइए कि $P(k+1)$ भी सत्य है।

3. यदि $P(n)$ कथन है "$2^{3n} - 1$, 7 का पूर्णांक गुणज है" तो सिद्ध कीजिए कि P(1), P(2) तथा P(3) सत्य हैं।

गणितीय आगमन सिद्धान्त से प्राकृत संख्या n के सभी मानों के लिए निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए –

4. $2^n > n$.

5. $n(n+1)(n+2)$, 6 से भाज्य है।

6. $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

7. $4 + 8 + 12 + \ldots + 4n = 2n(n+1)$.

8. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

9. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

10. $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$.

11. $a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + [a + (n-1)d] = \dfrac{n}{2}[2a + (n-1)d]$.

12. $3.6 + 6.9 + 9.12 + \ldots + 3n.(3n + 3) = 3n(n + 1)(n + 2)$

13. $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + n(n + 1)(n + 2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

14. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{(n+1)}$

15. $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{(2n+1)}$

16. $3^{2n} - 1$, 8 से भाज्य है।

17. $10^{(2n-1)} + 1$, 11 से भाज्य है।

18. $10^n + 3.4^{n+2} + 5$, 9 से भाज्य है।

19. $1 + 2 + 3 + \ldots + n < \frac{1}{8}(2n + 1)^2$

20. $(2n + 7) < (n + 3)^2$.

21. $x^n - y^n$, $(x - y)$ से भाज्य है, जबकि $x - y \neq 0$
[संकेत, $x^{(k+1)} - y^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x^k y + x^k y - y^{(k+1)}$, लिखिए]

22. गणितीय आगमन सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए कि n सदस्य वाले समुच्चय के 2^n उपसमुच्चय होते हैं, जहाँ n एक प्राकृत संख्या है।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

गणित के अनेक संकल्पनाओं (concepts) तथा विधियों की भाँति गणितीय आगमन की विधि किसी निश्चित समय पर किसी व्यक्ति विशेष की खोज नहीं है। मूलतः गणितीय आगमन सिद्धान्त पाइथागोरस के शिष्यों (छठवीं शताब्दी ई० पू०) को ज्ञात था।

गणितीय आगमन के सिद्धान्त के सूत्रपात का श्रेय फ्रान्सीसी गणितज्ञ **ब्लेज़ पास्कल** (Blaise Pascal) (1623–1662 ई०) को है। यद्यपि इससे पूर्व इटली के गणितज्ञ **फ्रान्सैस्को मोरोलिकस** (Fransasco Morolycus) (1494–1575 ई०) ने अपने लेखों में इस सिद्धान्त को प्रयुक्त किया है। भारतीय गणितज्ञ **भास्कराचार्य द्वितीय** (1114 – 1185 ई०) के लेखों में भी हम गणितीय आगमन की झलक पाते हैं।

संभवतः 'आगमन' नाम अंग्रेज़ गणितज्ञ **जॉन वालिस** (John Wallis) (1616–1703 ई०) ने प्रयुक्त किया था। बाद में स्विस गणितज्ञ **जेम्स बर्नोली** (James Bernoulli) (1655–1705 ई०) ने बिना नाम लिए इस सिद्धान्त का प्रयोग द्विपद प्रमेय सिद्ध करने के लिए किया था जिसकी अध्याय 16 में चर्चा की जाएगी।

पैनी साइक्लोपीडिया (Penny Cyclopedia) लंदन (1838 ई०) के अभिलेख के अनुसार "गणितीय आगमन" नाम **अगस्तस डिमोर्गन** (Augustus De Morgan) (1806–1871 ई०) ने प्रयुक्त किया था। इस नाम को तत्कालीन गणितज्ञों ने स्वीकार कर लिया था और लगभग आगामी चालीस वर्षों में सभी स्थानों के गणितज्ञों ने इसका उपयोग किया था। अन्त में प्रसिद्ध गणितज्ञ **लाप्लास** (Laplace) का यह कथन उद्धरण योग्य है *"विश्लेषण एवम् प्राकृतिक दर्शन के क्षेत्र में अत्यन्त महत्वपूर्ण खोज के लिए फलदायी साधन, जिसे हम आगमन कहते हैं, मुख्य कारण है।* **न्यूटन** (Newton) *द्विपद प्रमेय तथा गुरुत्वाकर्षण सिद्धान्त प्रमेयों में इसके उपयोग के लिए ऋणी था।"*

जी. पियानो (G. Peano) (1858–1932 ई०) का कार्य सम्पूर्ण गणित को तार्किक कलन (logical calculus) के पदों में व्यक्त करने की इच्छा से उत्प्रेरित था। पियानो ने गणितीय प्रमेयों के कथनों को तार्किक संकेतन के द्वारा व्यक्त करने के दायित्व का निर्वाह किया था। उसे परिमितातीत (transfinite) आगमन के सिद्धान्त को उद्धृत करने का श्रेय है। उनकी अभिगृहीतियाँ (axioms) "**पियानो के अभिगृहीत**" के नाम से जानी जाती हैं।

लघुगणक (LOGARITHMS)

अध्याय 4

4.1 भूमिका

स्कॉटिश गणितज्ञ **जॉन नेपियर** (John Napier) (1550–1617) ने 1614 में बड़ी संख्याओं के गुणा एवम् भाग में आने वाली कठिनाई को कम करने के विशेष उद्देश्य से लघुगणक की खोज की। शब्द **'लघुगणक'** दो यूनानी शब्दों **'लोगोस'** (logos) जिसका अर्थ **'अनुपात'** तथा **'अरिथमोस'** (arithmos) अर्थात् **'संख्या'** से मिलाकर बनाया गया। **हेनरी ब्रिग्स** (Henry Briggs) (1556–1630), जो नेपियर के समकालीन थे, ने साधारण लघुगणक (आधार 10) का आविष्कार किया। उन्होने 1624 में 1 से 2×10^4 तथा 9×10^4 से 10^5 तक की संख्याओं की 14 अंकीय लघुगणक सारणी प्रकाशित की। शेष संख्याओं के लघुगणक की गणना सर्वेक्षक **ईजैशील** (Ezechiel), **डी डैकर** (De Decker) तथा **ऐड्रियन लैक** (Adrian Vlaq) ने 1627 में प्रस्तुत की। आजकल लघुगणक ने कैलकुलेटर तथा कम्प्यूटर के प्रचलित होते हुए भी अपनी सार्थकता नहीं खोई है इसे आज भी गणित में एक महत्वपूर्ण कार्यकारी साधन समझा जाता है। हम इस अध्याय में लघुगणक क्या है तथा इसका अनुप्रयोग कैसे किया जा सकता है, की चर्चा करेंगें।

4.2 लघुगणक

लघुगणक एवं घातांक का आपस में निकट का संबंध है। जैसे पुनः पुनः जोड़ से एक नई संक्रिया गुणन उत्पन्न होती है उसी प्रकार एक गुणनखण्ड के पुनः पुनः गुणा करने से एक नई संक्रिया घाताांक का उदय होता है। इन्हीं के विपरीत संक्रिया से हमें दो भिन्न प्रतिलोम संक्रियाएँ उदाहरणतः मूल ज्ञात करना तथा लघुगणक लेना प्राप्त होती हैं। आइए, घातांक के मूलभूत तथ्यों का पुनः स्मरण करें जिनका लघुगणक द्वारा कार्य करने में भी उपयोग होगा। हम जानते हैं कि

(i) $2^8 = 256$ (ii) $3^3 = 27$ (iii) $4^2 = 16$ (iv) $9^3 = 729$

अर्थात् (i) 2 की आठवीं घात 256 है, (ii) 3 की तीसरी घात 27 है, (iii) 4 की दूसरी घात 16 है और इसी प्रकार अन्य। व्यापक रूप से, एक धन वास्तविक संख्या a तथा एक परिमेय संख्या m के लिए, हम पाते हैं कि

$$a^m = b$$

जहाँ b एक वास्तविक संख्या है। दूसरे शब्दों में, आधार a की m वीं घात b है। इस तथ्य को अन्य ढंग से व्यक्त करते हैं कि b का लघुगणक आधार a पर m है। इस प्रकार, उपर्युक्त उदाहरण में (i) प्रकट करता है, कि 256 का आधार 2 पर लघुगणक 8 है क्योंकि यह 2 की घात 8 है जिससे 256 प्राप्त होता है। इसी प्रकार (ii) प्रकट करता है, 27 का आधार 3 पर लघुगणक 3 है क्योंकि 3 की घात 3 है जिससे 27 प्राप्त होता है। (iii) तथा (iv) क्रमशः 16 का आधार 4 पर लघुगणक 2 तथा 729 का आधार 9 पर लघुगणक 3 प्रकट करता है। हम इन कथनों को निम्नांकित प्रकार से लिखते हैं

लघु$_2$ 256 = 8 लघु$_3$ 27 = 3 लघु$_4$ 16 = 2 तथा लघु$_9$ 729 = 3,

या $\log_2 256 = 8$, या $\log_3 27 = 3$, या $\log_4 16 = 2$, तथा या $\log_9 729 = 3$

आइए, अब हम लघुगणक को परिभाषित करते हैं।

परिभाषा प्रत्येक धन वास्तविक संख्या a के लिए, $a \neq 1$, अद्वितीय वास्तविक संख्या m को आधार a पर b का लघुगणक कहते हैं। या, $\log_a b = m$, यदि और केवल यदि $a^m = b$. लघु (log) लघुगणक के अंग्रेज़ी पर्याय शब्द logarithm, का संक्षिप्त रूप है।

परिभाषा से लघुगणक के निम्नलिखित गुणधर्म तुरंत प्राप्त होते हैं,

$\log_a 1 = 0$, क्योंकि $a^0 = 1$

$\log_a a = 1$, क्योंकि $a^1 = a$

$\log_a a^x = x$, क्योंकि $a^x = a^x$

इसके अतिरिक्त, जैसे a एक धन वास्तविक संख्या है, उसी प्रकार b भी एक धन वास्तविक संख्या है। अतः हम 1 से भिन्न एक धन वास्तविक संख्या के आधार पर ही केवल एक धन वास्तविक संख्या का लघुगणक परिभाषित करते हैं। ऋणात्मक संख्याओं और शून्य का कोई लघुगणक नहीं होता है। व्यंजक $\log(-2)$, $\log 0$, $\log(1-\sqrt{3})$ अर्थहीन है। (क्यों?)

उदाहरण 1 $4^5 = 1024$ को लघुगणकीय रूप में लिखिए।

हल अभीष्ट लघुगणकीय रूप $\log_4 1024 = 5$ है।

उदाहरण 2 $9^{\frac{5}{2}} = 243$ को लघुगणकीय रूप में लिखिए।

हल $\log_9 243 = \frac{5}{2}$ अभीष्ट लघुगणकीय रूप है ।

उदाहरण 3 $15^{-2} = \frac{1}{225}$ को लघुगणकीय रूप में लिखिए।

हल $\log_{15}\left(\frac{1}{225}\right) = -2$ अभीष्ट लघुगणकीय रूप है।

उदाहरण 4 $\log_2 16$ ज्ञात कीजिए

हल हम लघुगणक की परिभाषा से जानते हैं कि

$\log_a b = m$ यदि और केवल यदि $a^m = b, a > 0, a \neq 1,$

मान लीजिए $m = \log_2 16$, तो $2^m = 16$

चूंकि $16 = 2^4$ तब हम पाते हैं $2^m = 2^4$

इसलिए $m = 4$

इस प्रकार $\log_2 16 = 4$

उदाहरण 5 $\log_5 \sqrt[3]{5}$ ज्ञात कीजिए

हल मान लीजिए $m = \log_5 \sqrt[3]{5}$ तब $5^m = \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$

अतः $m = \dfrac{1}{3}$

इस प्रकार $\log_5 \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$

प्रश्नावली 4.1

निम्नलिखित को लघुगणकीय रूप में लिखिए :

1. $2^7 = 128$ **2.** $10^4 = 10000$ **3.** $3^4 = 81$ **4.** $4^3 = 64$

5. $7^2 = 49$ **6.** $6^0 = 1$ **7.** $10^{-1} = 0.1$ **8.** $8^3 = 512$

9. $(0.5)^2 = 0.25$ **10.** $n^p = m$ **11.** $a^b = c$ **12.** $a^{-b} = c$

निम्नलिखित में से प्रत्येक को घातांक रूप में व्यक्त कीजिए :

13. $\log_2 1 = 0$ **14.** $\log_5 25 = 2$ **15.** $\log_{10} 1000 = 3$ **16.** $\log_2 \frac{1}{4} = -2$

17. $\log_4 64 = 3$ **18.** $\log_7 343 = 3$ **19.** $\log_8 16 = \frac{4}{3}$ **20.** $\log_5 625 = 4$

21. $\log_9 6561 = 4$ **22.** $\log_r n = q$

निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

23. $\log_3 27$ **24.** $\log_2 \sqrt{32}$ **25.** $\log_{10} 10^5$ **26.** $\log_r r^4$

27. $\log_b b$ **28.** $\log_7 \sqrt[3]{7}$ **29.** $\log_n 1$

4.3 लघुगणकों के नियम

लघुगणक के निम्नलिखित नियम मूलतः पूर्व कक्षाओं में पढ़े घातांकों के नियम हैं। यह नियम किसी आधार a ($a > 0$ तथा $a \neq 1$) के लिए सत्य हैं । इस प्रकार हम पाते हैं।

प्रथम नियम $\log_a (m\,n) = \log_a m + \log_a n$

उपपत्ति कल्पना कीजिए कि $\log_a m = x$ तथा $\log_a n = y$,

तो $a^x = m$ तथा $a^y = n$

अतः $m\,n = a^x . a^y = a^{(x+y)}$

लघुगणक की परिभाषा से यह प्राप्त होता है कि

$$\log_a m\,n = x + y = \log_a m + \log_a n$$

दो संख्याओं के गुणनफल का लघुगणक समान आधार पर संख्याओं के लघुगणकों के योग के बराबर होता है।

द्वितीय नियम $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

उपपत्ति मान लीजिए $\log_a m = x$ तथा $\log_a n = y$

तो $a^x = m$ तथा $a^y = n$

अतः $\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^x . a^{-y} = a^{(x-y)}$

इसलिए $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = x - y = \log_a m - \log_a n$

दो संख्याओं के अनुपात का लघुगणक समान आधार पर अंश के लघुगणक तथा हर के लघुगणक का अन्तर होता है।

तृतीय नियम $\log_a m^n = n \log_a m$

उपपत्ति मान लीजिए, $\log_a m = x$

तो $a^x = m$

इसलिए $m^n = (a^x)^n = a^{nx}$

अतः $\log_a (m)^n = n\,x = n \log_a m$

n घात वाली संख्या का लघुगणक संख्या के लघुगणक का n गुना होता है।

उदाहरण 6 ज्ञात कीजिए : (i) $\log_2 16\sqrt{8}$ (ii) $\log_5 \frac{\sqrt[4]{25}}{625}$

हल (i) $\log_2 16\sqrt{8} = \log_2 16 + \log_2 \sqrt{8}$ (प्रथम नियम द्वारा)

$= \log_2 16 + \log_2 8^{\frac{1}{2}}$

$= \log_2 16 + \frac{1}{2}\log_2 8$ (तृतीय नियम द्वारा)

$= \log_2 2^4 + \frac{1}{2}\log_2 2^3$

$= 4 + \frac{1}{2}.3 = \frac{11}{2}$ (क्योंकि $\log_2 2 = 1$)

इस प्रकार $\log_2 16\sqrt{8} = \frac{11}{2}$.

(ii) $\log_5 \frac{\sqrt[4]{25}}{625} = \log_5 \sqrt[4]{25} - \log_5 625$ (द्वितीय नियम द्वारा)

$= \log_5 25^{\frac{1}{4}} - \log_5 5^4$

$= \frac{1}{4}\log_5 25 - 4\log_5 5$ (तृतीय नियम द्वारा)

$= \frac{1}{4}\log_5 5^2 - 4\log_5 5$

$= \frac{1}{4}(2\log_5 5) - 4\log_5 5$

$= \frac{1}{2} - 4 = -\frac{7}{2}$ (क्योंकि $\log_5 5 = 1$)

आधार परिवर्तन

आइए हम सीखें कि आधार a पर दिये लघुगणक को किसी अन्य आधार c पर किस प्रकार बदलते हैं। इसके लिए हम किन्ही वास्तविक धन संख्याओं r तथा b के लिए $(b \neq 1)$ निम्न को सिद्ध करते हैं

$$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b}$$

मान लीजिए कि $N = \log_b r$, तब लघुगणक की परिभाषा से

$$b^N = r$$

दोनों पक्षों का log आधार a पर लेने से हम पाते हैं,

$$N \log_a b = \log_a r$$

अतः $$N = \frac{\log_a r}{\log_a b}$$

या, $$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b}$$

ध्यान दीजिए हम a के स्थान पर कोई अन्य आधार चयन कर सकते हैं, अर्थात् किसी अन्य आधार c, $(c > 0, c \neq 1)$ के लिए

$$\log_b r = \frac{\log_c r}{\log_c b}$$

उदाहरण 7 ज्ञात कीजिए $\log_9 3$

हल $$\log_9 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3}{\log_3 3^2} = \frac{\log_3 3}{2\log_3 3} = \frac{1}{2}$$

उदाहरण 8 $\log_2 16 = 4$ ज्ञात है। $\log_{16} 2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल चूंकि $\log_b r = \dfrac{\log_a r}{\log_a b}$

मान लीजिए कि $b = 16, r = 2, a = 2$, हम पाते हैं

$$\log_{16} 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 16} = \frac{\log_2 2}{\log_2 2^4}$$

$$= \frac{\log_2 2}{4\log_2 2} = \frac{1}{4}$$

प्रश्नावली 4.2

निम्नलिखित में से प्रत्येक मान ज्ञात कीजिए :

1. $\log_3 27\sqrt{729}$ 2. $\log_2 \dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{8}}$ 3. $\log_{10} \sqrt[3]{100}$

4. $\log_7 \sqrt[3]{343}$ 5. $\log_{11} \left[\dfrac{121\sqrt{14641}}{\sqrt[3]{1331}}\right]$ 6. $\log_2 \dfrac{\sqrt[3]{4}}{4^2\sqrt{8}}$

निम्नलिखित प्रश्न 7 से प्रश्न 13 तक प्रत्येक में आधार $a = 10$ मान लीजिए :

7. सिद्ध कीजिए कि $\log (mnp) = \log m + \log n + \log p$.

8. सिद्ध कीजिए कि $\log 12 = \log 3 + \log 4$.

9. दिखाइए कि $\log 360 = 3 \log 2 + 2 \log 3 + \log 5$.

10. दिखाइए कि $\log \dfrac{50}{147} = \log 2 + 2 \log 5 - \log 3 - 2 \log 7$.

11. सिद्ध कीजिए कि $\log (a_1 a_2 \ldots a_k) = \log a_1 + \log a_2 + \ldots + \log a_k$.

12. सिद्ध कीजिए कि (i) $3 \log 2 + \log 5 = \log 40$.
(ii) $5 \log 3 + \log 9 = \log 2187$.

13. दिखाइए कि $3 \log 4 - 2 \log 6 + \log (18)^{\frac{3}{2}} = \log (96\sqrt{2})$

x के लिए हल कीजिए :

14. $x = \log_6 216$.

15. $x = \log_5 3125$.

16. $\log 2 + \log (x+2) - \log (3x - 5) = \log 3$.

4.4 साधारण लघुगणक (Common Logarithms)

आजकल लघुगणक के आधार की दो पद्धतियाँ अधिक प्रयोग में आती हैं। एक पद्धति में आधार e ($e = 2.71828$ **लगभग**) है और दूसरी पद्धति में आधार 10 है। आधार e के लघुगणक को **प्राकृत** (Natural) **लघुगणक** तथा आधार 10 के लघुगणक को **साधारण लघुगणक** कहते हैं। इस अध्याय में हम केवल साधारण लघुगणक की चर्चा करेंगे और आधार 10 पर लघुगणक n को बिना आधार दर्शाते हुए $\log n$ लिखते हैं। इस प्रकार $\log n$ का अर्थ $\log_{10} n$ होगा।

लघुगणक की परिभाषा से, प्रत्येक वास्तविक संख्या n के लिए

$$\log 10^n = n$$

निम्नांकित उदाहरणों को देखिए :

$$\begin{aligned}
\log 0.001 &= \log 10^{-3} = -3 \\
\log 0.01 &= \log 10^{-2} = -2 \\
\log 0.1 &= \log 10^{-1} = -1 \\
\log 1 &= \log 10^{0} = 0 \\
\log 10 &= \log 10^{1} = 1 \\
\log 100 &= \log 10^{2} = 2 \\
\log 1000 &= \log 10^{3} = 3.
\end{aligned}$$

उपर्युक्त परिणाम संकेत करते हैं कि यदि n, 10 का पूर्णांकीय घात है अर्थात 1 के बाद अनेक शून्य या 1 से पूर्व अनेक शून्य दशमलव बिन्दु के साथ हैं, तो $\log n$ आसानी से ज्ञात किया जा सकता है। यदि n, 10 का पूर्णांकीय घात नहीं है तो $\log n$ की गणना सरल नहीं है। परन्तु लघुगणकीय सारणी से हम 1 से 10 के मध्य किसी धनात्मक संख्या के लघुगणक का निकटतम मान पढ़ सकते हैं जो दशमलव रूप में अंकित किसी भी संख्या के लघुगणक की गणना करने के लिए पर्याप्त है। इस उद्देश्य के लिए, हम सदैव दी हुई संख्या को 1 और 10 के मध्य एक संख्या तथा 10 की पूर्णांकीय घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त करते हैं।

4.4.1 दशमलव का मानक रूप (Standard Form) हम देखते हैं कि दशमलव रूप में किसी संख्या को (क) 10 की पूर्णांकीय घात और (ख) 1 और 10 के मध्य एक संख्या के गुणनफल के रूप में कैसे व्यक्त कर सकते हैं? आइए हम निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें :

(i) 32.4, 10 और 100 के बीच में स्थित है। इसलिए,

$$32.4 = \frac{32.4}{10} \times 10 = 3.24 \times 10^{1}.$$

(ii) 1005.6, 1000 और 10000 के बीच में स्थित है। इसलिए,

$$1005.6 = \frac{1005.6}{1000} \times 10^{3} = 1.0056 \times 10^{3}.$$

(iii) 0.006, 0.001 और 0.01 के बीच में स्थित है। इसलिए,

$$0.006 = (0.006 \times 1000) \times 10^{-3} = 6.0 \times 10^{-3}.$$

(iv) 0.00025, 0.0001 और 0.001 के बीच में स्थित है। इसलिए,

$$0.00025 = (0.00025 \times 10000) \times 10^{-4} = 2.5 \times 10^{-4}.$$

प्रत्येक स्थिति में दशमलव बिन्दु के बाँयी ओर एक अशून्य अंक लाने के लिए हम दशमलव को 10 की घात से भाग अथवा गुणा करते हैं और पुनः उपर्युक्त विधि के अनुसार 10 की उसी घात से प्रतिलोम संक्रिया करते हैं।

इस प्रकार, एक धन दशमलव संख्या n सदैव इस रूप में लिखी जा सकती है :

$$n = m \times 10^p$$

यहाँ p एक पूर्णांक है और $1 \leqslant m < 10$ । यह दशमलव संख्या n का मानक रूप कहलाता है।

कार्यकारी नियम :

(1) दशमलव बिन्दु के बाँयी ओर एक अशून्य अंक लाने के लिए आवश्यक दशमलव बिन्दु को बाँयें या दायें की ओर हटाते हैं।

(2) इस प्रकार,

 (i) यदि आप p स्थान बायें हटाते हैं तो 10^p से गुणा कीजिए।

 (ii) यदि आप p स्थान दायें हटाते हैं तो 10^{-p} से गुणा कीजिए।

 (iii) यदि आप दशमलव बिन्दु को बिल्कुल नहीं हटाते हैं तो 10^0 से गुणा कीजिए।

 (iv) दिए दशमलव का मानक रूप प्राप्त करने के लिए 10 की घात से प्राप्त नये दशमलव को लिखिए।

उदाहरण 9 संख्या 4362 को मानक रूप में लिखिए।

हल हम दी हुई संख्या को $4362 = \frac{4362}{1000} \times 10^3 = 4.362 \times 10^3$ लिख सकते हैं और यही इसका मानक रूप है। ध्यान दीजिए कि 4.362, 1 तथा 10 के बीच स्थित है।

उदाहरण 10 0.06583 को मानक रूप में लिखिए।

हल दी हुई संख्या 0.06583 का मानक रूप 6.583×10^{-2} है।

प्रश्नावली 4.3

निम्नलिखित में से प्रत्येक को मानक रूप में लिखिए :

1. 5.678 **2.** 56.78 **3.** 567.8 **4.** 5678

5. 5678000 **6.** 0.5678 **7.** 0.05678 **8.** 0.00005

निम्नलिखित संख्याओं को 10 की घात के बिना दशमलव रूप में लिखिए :

9. 3.2×10^{-2} **10.** 18.67×10^{-1} **11.** 52.8×10^2 **12.** 111.2×10^3

13. 1232.1×10^4 **14.** 0.005×10^3 **15.** 0.04×10^4 **16.** 1.2056×10^{-2}

17. 9.999×10^5 **18.** 1.634×10^{-5}

4.5 पूर्णांश (Characteristic) और अपूर्णांश (Mantissa)

हम सीख चुके हैं कि कैसे एक संख्या, मान लीजिए कि n,को मानक रूप में लिखते हैं। जैसे

$n = m \times 10^p$, **जहाँ** $1 \leqslant m < 10$

दोनों पक्षों का आधार 10 पर लघुगणक लेकर तथा लघुगणकों के नियमों का प्रयोग करते हुए हम पाते हैं

$$\log n = \log (m \times 10^p)$$
$$= \log m + \log 10^p$$
$$= \log m + p \log 10$$

इस प्रकार $\log n = p + \log m$ (1)

यहाँ p एक पूर्णांक है, $1 \leqslant m < 10$, अत: $0 \leqslant \log m < 1$

(1) में p को $\log n$ का **'पूर्णांश'** तथा $\log m$ को $\log n$ का **अपूर्णांश** कहते हैं। यह ध्यान देना चाहिए कि पूर्णांश सदैव एक पूर्णांक और अपूर्णांश सदैव 0 तथा 1 के बीच स्थित होता है। पुन: ध्यान दीजिए कि **अपूर्णांश कभी ऋणात्मक नहीं होता है**। इस प्रकार, $\log n$ प्राप्त करने के लिए हम $\log n$ के पूर्णांश तथा अपूर्णांश ज्ञात करके उन्हें जोड़ देते हैं।

उदाहरण 11 log 59273 का पूर्णांश ज्ञात कीजिए।

हल हम दी हुई संख्या को मानक रूप में निम्न प्रकार रखते हैं

$$59273 = 5.9273 \times 10^4$$
$$\log 59273 = \log [5.9273 \times 10^4]$$
$$= \log 10^4 + \log 5.9273$$
$$= 4 + \log 5.9273$$

इस प्रकार, log 59273 का पूर्णांश 4 है।

उदाहरण 12 log 0.00253 का पूर्णांश ज्ञात कीजिए।

हल स्पष्टत: $0.00253 = 2.53 \times 10^{-3}$

अत: log 0.00253 का पूर्णांश −3 है।

प्रश्नावली 4.4

निम्नलिखित संख्याओं के लघुगणक का पूर्णांश ज्ञात कीजिए :

1. 3862 **2.** 38.62 **3.** 910 **4.** 8

5. 0.376 **6.** 0.0056 **7.** 0.00023 **8.** 555.2

9. 4.385 **10.** 217.3

4.6 लघुगणकीय सारणी

संख्या के लघुगणक का अपूर्णांश ज्ञात करने के लिए इस पुस्तक के अन्त मे उपलब्ध लघुगणक सारणी का प्रयोग करते हैं। हम देखते हैं कि सारणी की प्रत्येक पंक्ति दो अंकीय संख्याओं 10, 11, 12 . . ., 99 से प्रारम्भ होती है तथा स्तम्भ के शीर्ष (ऊपरी भाग) पर एक अंकीय संख्या 0, 1, 2, 3, . . ., 9 हैं। सारणी के दायीं ओर का भाग, जिसे औसत अन्तर (mean–difference) कहते हैं, में नौ स्तम्भ हैं जो शीषक 1, 2, ..., 9 द्वारा दर्शाए गए है (सारणी 4.1 में यह भाग देखिए)।

सारणी 4.1

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1 2 3	3 4 5	6 7 8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1 2 3	3 4 5	6 7 8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1 2 2	3 4 5	6 7 7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1 2 2	3 4 5	6 6 7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1 2 2	3 4 5	6 6 7

किसी संख्या के लघुगणक, यथा log 5.423, के अपूर्णांश ज्ञात करने के लिए हम निम्नलिखित विधि का प्रयोग करते हैं।

1. हम दी हुई संख्या के दशमलव बिन्दु पर ध्यान नहीं देते हैं।
2. तब दी हुई संख्या के प्रथम दो अंक जैसे 54 को सारणी के बाँयें स्तम्भ शीर्षक N में पढ़ते हैं।
3. हम संख्या 54 से प्रारम्भ होने वाली पंक्ति में शीर्ष 2 वाले स्तम्भ को पढ़ते हैं। यह संख्या 7340 अंकित है। (सारणी 4.1)
4. हम इसी पंक्ति में और दी संख्या के चौथे अंक अर्थात् शीर्ष 3 वाले स्तम्भ को पढ़ते हैं, यह संख्या 2 है।
5. दो प्राप्त संख्याओं का योग अर्थात् 7340 + 2 = 7342, संख्या के लघुगणक का अपूर्णांश अर्थात् .7342 है।

दी हुई संख्या के लघुगणक को प्राप्त करने के लिए पूर्णांश तथ अपूर्णांश जोड़कर अंतिम उत्तर प्राप्त करते हैं। इस प्रकार, log 5.423 = 0.7342 क्योंकि 5.423 का पूर्णांश शून्य है।

संख्या के लघुगणक को प्राप्त करने का कार्यकारी नियम संक्षिप्त रूप में निम्नांकित है :

1. दी हुई संख्या n को मानक रूप में लिखिए, यथा $n = m \times 10^p, 1 \leqslant m < 10$.
2. इस मानक रूप से $\log n$ का पूर्णांश p अर्थात् 10 का घातांक देखिए।
3. उपर्युक्त समझाये गये नियम के अनुसार $\log m$ सारणी से देखिए।
4. $\log n = p + \log m$ लिखिए।

यदि संख्या n का पूर्णांश 2 है और अपूर्णांश .4133 है, तो हम पाते हैं $\log n = 2 + .4133$ जिसे हम 2.4133 लिख सकते हैं। फिर भी, यदि किसी संख्या n का पूर्णांश, मान लीजिए -2 है और अपूर्णांश .4123 है तो हम पाते हैं $\log n = -2 + .4123$. इस स्थिति में हम -2 के लिए $\bar{2}$ लिखते हैं और इस प्रकार $\log n = \bar{2}.4123 = -(1.5877)$ पाते हैं।

टिप्पणी यहाँ ध्यान देना चाहिए कि सारणी से प्राप्त मान पूर्णतः शुद्ध नहीं हैं। वे निकटतम मान हैं, यद्यपि हम समता का चिन्ह प्रयोग करते हैं जिससे यह अनुभूति हो सकती है कि वे पूर्णतः शुद्ध मान हैं।

उदाहरण 13 log 1873 ज्ञात कीजिए।

हल संख्या 1873 का मानक रूप है

$$
\begin{aligned}
1873 &= 10^3 \times 1.873 \\
\log (1873) &= \log (10^3 \times 1.873) \\
&= \log 10^3 + \log 1.873 \\
&= 3 + \log 1.873
\end{aligned}
$$

अतः log (1873) का पूर्णांश 3 है।

हम log 1873 का अपूर्णांश ज्ञात करने के लिए लघुगणकीय सारणी की सहायता लेते हैं। हम शीर्षक N वाले बाईं ओर के स्तम्भ में 18 के सम्मुख पंक्ति देखते हैं। संख्या का तृतीय अंक 7 होने के कारण हम पहले से प्राप्त पंक्ति में प्रविष्टि (entry) को ढूँढ़ते हैं। संख्या 7 के नीचे 18 के सम्मुख वाली पंक्ति में 2718 है। चौथा अंक 3 है, अतः हम इसी पंक्ति में औसत अन्तर (mean–difference) के शीर्ष 3 अंकित स्तम्भ के नीचे प्रविष्टि ढूँढ़ते हैं जो कि 7 है। दोनों प्रविष्टियों का योग अर्थात् $2718 + 7 = 2725$ है।

इस प्रकार $\log 1873 = 3.2725$

उदाहरण 14 log 82.29 ज्ञात कीजिए।

हल संख्या 82.29 का मानक रूप है

$82.29 = 10^1 \times 8.229$

log 82.29 का पूर्णांक 1 है।

अब हम लघुगणक सारणी की पंक्ति में 82 तथा स्तम्भ 2 के नीचे देखते हैं और प्रविष्टि संख्या 9149 पाते हैं। हम इसी पंक्ति में आगे बढ़ते हैं और औसत अन्तर स्तम्भ 9 के नीचे संख्या 5 पाते हैं। इस प्रकार 9149 में 5 जोड़ कर 9154 प्राप्त करते हैं।

अतः $\log 82.29 = 1.9154$.

उदाहरण 15 log 0.000438 ज्ञात कीजिए।

हल 0.000438 का मानक रूप $10^{-4} \times 4.38$ है।

इसलिए $\log (0.000438) = -4 + \log 4.38$

log (0.000438) का पूर्णांश −4 है। उपर्युक्त दोनों उदाहरणों में चर्चा की गई विधि से हम log 4.38 का अपूर्णांश .6415 ज्ञात करते हैं। इस प्रकार हम पाते हैं

$$\log (0.000438) = -4 + .6415 = \bar{4}.6415$$
$$= -(3.3585)$$

प्रश्नावली 4.5

लघुगणक सारणी का प्रयोग करके निम्नलिखित संख्याओं के लघुगणक ज्ञात कीजिए

1. 380 **2.** 7835 **3.** 12.70

4. 134.5 **5.** 31.32 **6.** 0.5127

7. 0.0012 **8.** 0.0001379 **9.** 0.00001379

10. 2576

4.7 प्रतिलघुगणक (Antilogarithm)

अभी तक हमने संख्या के लघुगणक ज्ञात करने की विधि सीखी है। अब हम उस संख्या को ज्ञात करना सीखेंगे जिसका लघुगणक दिया हुआ है। किसी दिये लघुगणक की संगत संख्या को उसका प्रतिलघुगणक कहते हैं। इस हेतु हम पुस्तक के अंत में उपलब्ध प्रतिलघुगणक सारणी का उपयोग करते हैं।

कल्पना कीजिए $\log n = 2.7253$

n ज्ञात करने के लिए, प्रथमतः हम $\log n$ का अपूर्णांश भाग अर्थात् .7253 लेते हैं। प्रतिलघुगणक सारणी में अब हम इस संख्या का प्रतिलघुगणक देखते हैं जो कि लघुगणक सारणी जैसी ही है। प्रतिलघुगणक सारणी में पंक्ति .72 के सम्मुख स्तम्भ 5 के नीचे प्रविष्टि 5309 है और अंतिम अंक 3 के लिए इसी पंक्ति में स्तम्भ 3 के नीचे औसत अन्तर 4 है। इस प्रकार सारणी से योगफल 5313 प्राप्त होता है। क्योंकि पूर्णांश 2 है, संख्या का antilog (प्रतिलघु) $10^2 \times n$ के रूप का होना चाहिए जहाँ n, 1 तथा 10 के बीच स्थित है इसलिए, 3 अंकों के बाद दशमलव बिन्दु लगाना चाहिए। अतः 2.7253 का प्रतिलघुगणक (antilog) 531.3 है।

उदाहरण 16 antilog 0.2001 ज्ञात कीजिए।

हल दी हुई संख्या का पूर्णांश शून्य है। हम अपूर्णांश .2001 पर विचार करते हैं। प्रतिलघुगणक सारणी में .2001 के संगत संख्या 1585 है। क्योंकि पूर्णांश शून्य है, .2001 का प्रतिलघु $10^0 \times n$ के रूप का होना चाहिए जहाँ n, 1 तथा 10 के बीच स्थित है और इस प्रकार इसके पूर्ण भाग में एक अंक है। अतः दशमलव बिन्दु एक अंक के बाद लगाना चाहिए।

अतएव antilog .2001 = 1.585 है।

उदाहरण 17 antilog $\bar{2}.2935$ ज्ञात कीजिए।

हल दी हुई संख्या का अपूर्णांश .2935 है। .29 के सम्मुख पंक्ति के स्तम्भ 3 के नीचे प्रविष्टि 1963 है। अंतिम अंक 5 के लिए औसत अन्तर 2 है, इस प्रकार से हम 1965 प्राप्त करते हैं। पूर्णांश −2 है। अतः antilog $(\bar{2}.2935) = 1.965 \times 10^{-2} = .01965$ है।

उदाहरण 18 antilog (− 1.2467) ज्ञात कीजिए।

हल चूँकि अपूर्णांश ऋणात्मक (−.2467) है अतः पहले हम इसे धनात्मक बनायेंगे।

जैसे −1.2467 = 2.7533

इस प्रकार, धनात्मक अपूर्णांश 0.7533 है। अब .75 के सम्मुख पंक्ति के स्तम्भ 3 के नीचे प्रविष्टि 5662 है। उसी पंक्ति में औसत अंतर स्तम्भ 3 के नीचे 4 है। इस प्रकार, सारणी से प्राप्त प्रविष्टि 5666 है। क्योंकि पूर्णांश 2 है, अतः antilog (−1.2467) = .05666 है।

प्रश्नावली 4.6

सारिणयों का प्रयोग करके निम्नलिखित संख्याओं के लघुगणक (logarithm) ज्ञात कीजिए :

1. 3 **2.** 3.14 **3.** 3.148 **4.** 0.532
5. 0.05432 **6.** 0.005 **7.** 0.0000528 **8.** 2837
9. 8.123 **10.** 67.77

log x ज्ञात कीजिए, यदि x बराबर है

11. 1 **12.** 0.01 **13.** $\sqrt{10}$ **14.** 0.0087
15. 0.0728

निम्नलिखित में से प्रत्येक का प्रतिलघुगणक (anti logarithm) ज्ञात कीजिए :

16. 1.3076 **17.** 2.5851 **18.** 4.5851 **19.** .5851
20. 2.6861 **21.** − (4.9212) **22.** 4.8863 **23.** 0.49
24. $\bar{3}.2346$ **25.** − (0.7214) **26.** − (2.5514)

4.8 लघुगणक के अनुप्रयोग

गणितज्ञ लाप्लास (Laplace) का निम्नलिखित प्रसिद्ध कथन गणित में लघुगणक के अनुप्रयोग की महत्ता दर्शाता है। उनका कथन है कि ***लघुगणक की खोज से गणनायें छोटी हो जाती हैं, महीनों में की जाने वाली गणनाएँ छोटी होकर केवल कुछ दिनों में हो जाती हैं। इस प्रकार, गणक के जीवनकाल को दुगुना कर देती है।*** आइए, देखें कि लघुगणक से गणनाएँ कैसे छोटी होती हैं। यहाँ हम निम्नलिखित क्षेत्रों में लघुगणक के अनुप्रयोगों पर विचार करेंगे :

4.8.1 संख्यात्मक गणनाओं में लघुगणक के अनुप्रयोग :

उदाहरण 19 3.62×1.296 को सरल कीजिए।

हल मान लीजिए कि $x = 3.62 \times 1.296$

तो $\log x = \log(3.62 \times 1.296)$

$= \log 3.62 + \log 1.296$ (लघुगणक के प्रथम नियम द्वारा)

तो $\log 3.62 = 0.5587$,

$\log 1.296 = 0.1126$

इसलिए, $\log x = 0.6713$

अतः $x = \text{antilog}\,(0.6713) = 4.691$

उदाहरण 20 ज्ञात कीजिए $\dfrac{(2.13)^{2.5} \times (1.23)^{1.5}}{(11.2) \times (23.8)}$

हल मान लीजिए $x = \dfrac{(2.13)^{\frac{5}{2}} \times (1.23)^{\frac{3}{2}}}{(11.2) \times (23.8)}$

तो $$\log x = \log \left[\frac{(2.13)^{\frac{5}{2}} \times (1.23)^{\frac{3}{2}}}{(11.2) \times (23.8)} \right]$$

$$= \frac{5}{2} \log 2.13 + \frac{3}{2} \log 1.23 - \log 11.2 - \log 23.8$$

अब $\frac{5}{2} \log 2.13 = 0.8210$,

$$\frac{3}{2}\log 1.23 = 0.13485,$$

$$\log 11.2 = 1.0492,$$

$$\log 23.8 = 1.3766$$

इसलिए $\log x = \bar{2}.53005.$

$$= \bar{2}.5301$$

या $x = 0.03389.$

उदाहरण 21 ज्ञात कीजिए $\dfrac{29.5\times 67.8\times\sqrt{39.3}}{57.55}$

हल मान लीजिए $x = \dfrac{29.5\times 67.8\times\sqrt{39.3}}{57.55}$

तो $\log x = \log\left[\dfrac{29.5\times 67.8\times(39.3)^{\frac{1}{2}}}{57.55}\right]$

$$= \log 29.5 + \log 67.8 + \frac{1}{2}\log 39.3 - \log 57.55$$

अब $\log 29.5 = 1.4698$

$$\log 67.8 = 1.8312,$$

$$\frac{1}{2}\log 39.3 = 0.7972,$$

$$\log 57.55 = 1.7601$$

इस प्रकार $\log x = 2.3381$

इसलिए $x = 217.8.$

4.8.2 चक्रवृद्धि ब्याज़ की गणना में लघुगणक का अनुप्रयोग

उदाहरण 22 यदि 5 वर्ष के लिए 572 रु की धनराशि, को 10% चक्रवृद्धि ब्याज़ की दर पर लगाया जाए और ब्याज़ प्रतिवर्ष संयोजित किया जाए, तो बताइए कि 5 वर्ष के अन्त में कुल कितना धन प्राप्त होगा।

हल हमें चक्रवृद्धि ब्याज़ का सूत्र ज्ञात है :

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

जहाँ P मूलधन, r प्रतिशत ब्याज़ की दर, n वर्षों की संख्या और A अन्त में प्राप्त राशि है।

यहाँ $P = 572$ रु, $r = 10, n = 5$

इस प्रकार $A = 572\left(1+\frac{10}{100}\right)^5$

$= 572\,(1.1)^5$

अब $\log A = \log 572\,(1.1)^5$

$= \log 572 + 5\log(1.1)$

$= 2.7574 + 0.2070 = 2.9644$

अतः $A = \text{antilog}(\log A) = \text{antilog}(2.9644) = 921.2$

इस प्रकार, अभीष्ट राशि $A = 921.20$ रु (लगभग)

उदाहरण 23 यदि 1750 रु, 9 प्रतिशत वार्षिक ब्याज़ पर 10 वर्ष के लिए निवेशित किया जाए तो

(a) चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है।

(b) चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए जबकि ब्याज प्रति छमाही संयोजित होता है।

(c) (a) तथा (b) के मध्य अन्तर ज्ञात कीजिए।

हल (a) सूत्र के प्रयोग से

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

हम पाते हैं $A = 1750\,(1+.09)^{10} = 1750\,(1.09)^{10}$

तो $\log A = [\log 1750 + 10\log 1.09]$

अब $\log 1750 = 3.2430$

$\log 1.09 = 0.0374$

$10\log 1.09 = 0.3740$

तो $\log A = 3.6170$

इसलिए $A = \text{antilog}\,3.6170 = 4140$

अतः अभीष्ट ब्याज़ = 4140 रु − 1750 रु = 2390 रु

(ख) ब्याज़, अर्द्धवार्षिक चक्रवृद्धि है, दर प्रति आवर्त 4.5 है तथा परिवर्तित आवर्त 20 हैं।

इस प्रकार $A = 1750\,(1+.045)^{20} = 1750\,(1.045)^{20}$

तो $\log A = \log [1750\,(1.045)^{20}] = \log 1750 + 20 \log (1.045)$

अब $20 \log 1.045 = 0.3820$

$\log 1750 = 3.2430$

इस प्रकार, $\log A = 3.6250$

इससे प्राप्त होता है $A = \text{antilog } 3.6250 = 4217$

इसलिए $A = 4217$

अतः ब्याज़ $= A - P = 4217$ रु $- 1750$ रु $= 2467$ रु

(c) अन्तर $\{(b)-(a)\} = 2467$ रु $- 2390$ रु $= 77$ रु

इसलिए अर्द्धवार्षिक संयोजित चक्रवृद्धि ब्याज़, वार्षिक संयोजित चक्रवृद्धि ब्याज से 77 रु अधिक है।

4.8.3 जनसंख्या वृद्धि की गणना में लघुगणक का अनुप्रयोग

मान लीजिए किसी वर्ष के प्रारम्भ में जनसंख्या P_0 हो तथा अचर वार्षिक वृद्धि दर $r\,\%$ हो। चूँकि वृद्धि की माप उस वस्तु के बढ़े हुए परिमाण का प्रारम्भिक परिमाण से अनुपात है, तब अनुपात

$$\frac{P_1 - P_0}{P_0} \qquad (1)$$

एक वर्ष में वृद्धि है जहाँ P_1 किसी विशेष वर्ष के अन्त की जनसंख्या है। हम अनुपात (1) को **वृद्धि की दर** कहते हैं।

इस प्रकार, वृद्धि की दर = वृद्धि प्रति वर्ष

वृद्धि की दर को प्रतिशत में व्यक्त करते हुए अर्थात्

यदि $$\frac{P_1 - P_0}{P_0} = \frac{r}{100}$$

या $$P_1 = P_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

जहाँ वृद्धि दर $r\,\%$ प्रतिवर्ष है।

इस प्रकार, एक वर्ष बाद जनसंख्या है

$$P_1 = P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

दो वर्ष बाद हम पाते हैं

$$P_2 = P_1\left(1+\frac{r}{100}\right) = P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

इसी प्रकार, $P_3 = P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$,.... इत्यादि

यदि n कोई धन पूर्णांक हो, तो n वर्ष बाद जनसंख्या होगी,

$$P_n = P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

उदाहरण 24 1991 की जनगणना के अनुसार दिल्ली की जनसंख्या 9.4×10^7 थी। यदि 2% प्रतिवर्ष की दर से जनसंख्या बढ़ती है तो 2001 में जनसंख्या क्या होगी ?

हल यह प्रश्न 2% की दर से चक्रवृद्धि की स्थिति जैसी है। अतः हम सूत्र

$$P_n = P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

प्रयोग करेंगे।

यहाँ $P_0 = 9.4\times10^7$, $r = 2$, $n = 10$ और $P_{10} = y$ (मान लीजिए) दिल्ली की 10 वर्ष के अन्त में जनसंख्या है।

इस प्रकार $$y = 9.4\times10^7\left(1+\frac{2}{100}\right)^{10}$$

$$= 9.4\times10^7\,(1.02)^{10}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर, हम पाते हैं

$$\log y = \log\,[9.4\times10^7\times(1.02)^{10}]$$

$$= \log\,(9.4\times10^7) + \log\,(1.02)^{10}$$

$$= \log\,(9.4\times10^7) + 10\log\,(1.02)$$

क्योंकि $\log\,(9.4\times10^7) = 7.9731$

तथा $10\log 1.02 = 0.0860$

इसलिए $\log y = 8.0591$

अतः $y = \text{antilog}\,(8.0591) = 1.146\times10^8$

4.8.4 मूल्य के अवमूल्यन की गणना में लघुगणक का अनुप्रयोग

हम जानते हैं कि किसी वस्तु का मूल्य टूट–फूट के कारण समय के साथ घटता रहता है। इस वस्तु के मूल्य में हुई सापेक्ष कमी को **अवमूल्यन** (depreciation) कहते हैं। दूसरे शब्दों में, **अवमूल्यन को क्षय ऋणात्मक वृद्धि** कहते हैं।

प्रति इकाई अवधि अवमूल्यन को अवमूल्यन की दर कहते हैं।

इस प्रकार, यदि V_0 प्रारम्भिक मूल्य है और अवमूल्यन की दर $r\%$ प्रतिवर्ष है तो t वर्षों के पश्चात् मूल्य

$$V_t = V_0\left(1-\frac{r}{100}\right)^t \text{ होगा।}$$

उदाहरण 25 एक मशीन 20000 रु में खरीदी गई। इसका अवमूल्यन 5% वार्षिक की दर से होता है, जबकि प्रत्येक वर्ष के अवमूल्यन का परिकलन उस वर्ष के आरम्भ के मूल्य पर करते हैं। बताइए कि 7 वर्ष के बाद उस मशीन का घटा हुआ मूल्य क्या होगा?

हल अवमूल्यन की दर 5% वार्षिक है।

यदि वर्ष के आरम्भ में, मशीन का मूल्य 1 रु हो तो वर्ष के अन्त में उसका घटा हुआ मूल्य $\left(1-\frac{5}{100}\right)$ रु होगा। इस प्रकार, 7 वर्ष के पश्चात् 1 रु का घटा हुआ मूल्य $= \left(1-\frac{5}{100}\right)^7$ रु

मशीन का क्रय मूल्य = 20000 रु

मान लीजिए मशीन का 7 वर्ष के अन्त में घटा हुआ मूल्य x रु है, तो

$$x = 20000\left(1-\frac{5}{100}\right)^7 \text{ रु}$$
$$= 20000\,(1-0.05)^7$$
$$= 20000\,(.95)^7$$

तो $\log x = \log\,[20000\,(.95)^7]$

$$= \log 20000 + 7\log .95$$
$$= 4.3010 + 7 \times \overline{1}.9777$$
$$= 4.3010 + \overline{1}.8439 = 4.1449$$

इसलिए x = antilog (4.1449) = 13990 (लगभग)

अतः अभीष्ट घटा हुआ मूल्य = 13990 रु (लगभग)

उदाहरण 26 अवमूल्यन द्वारा एक ऑटोमोबाइल का मूल्य वर्ष में प्रारम्भ के अपने मूल्य का 20% कम हो जाता है। यदि एक ऑटोमोबाइल का प्रारम्भिक मूल्य 36000 रु था तो पाँच वर्ष के अन्त में इसका मूल्य बताइए।

हल मान लीजिए 5 वर्ष के अन्त में अवमूल्यन के बाद मूल्य x रु हो तो सूत्र के प्रयोग से

$$x = x_0\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$$

5 वर्ष के अन्त में अवमूल्यन के बाद मूल्य $= x_0\left(1-\frac{20}{100}\right)^5$

प्रारम्भिक मूल्य $x_0 = 36000$ रु

इस प्रकार $x = 36000\left(1-\frac{20}{100}\right)^5$

$$= 36000\,(1-.2)^5 = 36,000\,(.8)^5$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर हम पाते है

$$\log x = \log\,[36000 \times (.8)^5]$$

$$= \log 36000 + 5 \log 0.8$$

$$= 4.5563 + 5 x (\bar{1}.9031)$$

$$= 4.5563 + (\bar{1}.5155)$$

$$= 4.0718$$

अतः $x = \text{antilog } 4.0718 = 11,800$ रु. (लगभग)

प्रश्नावली 4.7

लघुगणक का प्रयोग करके निम्नलिखित की गणना कीजिए :

1. $\dfrac{38.7 \times 0.0021}{0.0189}$

2. $\dfrac{(3.7)^{\frac{1}{3}} \times 0.573}{0.038 \times 7.93}$

3. $(38.56)^{\frac{1}{4}} \times (79.38)^{\frac{1}{2}}$

4. $\dfrac{(3.598)^2 \times (4.52)^3}{(64.25)^3 \times \sqrt[3]{5.25}}$

5. $\sqrt[3]{\dfrac{(45.4)^2}{(3.2)^2 \times (6.5)^3}}$

6. 25000 रु का एक निवेश 9 प्रतिशत प्रतिवर्ष चक्रवृद्धि ब्याज कमाता है। 5 वर्ष के अन्त में निवेश का मूल्य क्या होगा?

7. बताइए 35000 रु की धन राशि कितने वर्षों में दुगनी हो जायेगी जब कि धन 4% प्रतिवर्ष पर निवेश किया गया है और ब्याज चक्रवृद्धि अर्द्धवार्षिक संयोजित होता हो।

8. एक नई कार का क्रय मूल्य 3.7×10^5 रु है। एक बीमा कम्पनी नियम के अनुसार भविष्य में किसी नियत समय के लिए इसका मूल्य परिकलित करती है। पहले दो साल में कार का अवमूल्यन 5% प्रतिवर्ष की दर से होता है, और उसके पश्चात् 10% प्रतिवर्ष की दर से हो तो कार का 5 वर्ष के बाद मूल्य ज्ञात कीजिए।

9. हरियाणा की जनसंख्या 1991 जनगणना के अनुसार 17.8×10^7 थी । यदि हरियाणा की जनसंख्या में वार्षिक वृद्धि दर 2.5% हो तो 10 वर्ष बाद इसकी जनसंख्या ज्ञात कीजिए।

10. किस वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 100 रु की राशि 3 वर्ष में 125 रु हो जायेगी जब कि ब्याज प्रतिवर्ष संयोजित होता है?

विविध उदाहरण

उदाहरण 27 x का मान बताइए यदि $\log_a x = 3 \log_a y - \frac{1}{2}\log_a z$

जहाँ $a > 0, a > 1, y > 0$ तथा $z > 0$.

हल लघुगणकों के नियमों को प्रयुक्त करने से हम पाते हैं

$$\log_a x = 3 \log_a y - \frac{1}{2} \log_a z$$

या $$\log_a x = \log_a \frac{y^3}{\sqrt{z}}$$

समान आधार पर संख्याओं के लघुगणक की समता का अर्थ इन संख्याओं की समता से है।

इस प्रकार, $$x = \frac{y^3}{\sqrt{z}}$$

उदाहरण 28 2000 रु० की 9 % वार्षिक से किसी निश्चित समय का चक्रवृद्धि ब्याज 2589.00 रु है जब कि ब्याज वार्षिक संयोजित होता है तो समय अन्तराल ज्ञात कीजिए।

हल धनराशि A = (2000 + 2589) रु = 4589 रु

इस प्रकार, हम पाते हैं P = 2000 रु०, r = 9% वार्षिक ,

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

$$4589 = 2000\left(1+\frac{9}{100}\right)^n$$

या $$\frac{4589}{2000} = (1.09)^n \quad (1)$$

(1) के दोनों पक्षों का log लेने पर हम पाते हैं

$$\log 4589 - \log 2000 = n \log 1.09$$

या $$3.6618 - 3.3010 = n \times 0.0374$$

या $$0.3608 = n \times 0.0374$$

या $$n = 9.6 \text{ (लगभग)}$$

अतः, लगभग 9.6 वर्ष में 2000 रु की धन राशि का 9 % वार्षिक की दर से चक्रवृद्धि ब्याज 2589 रु होगा।

अध्याय 4 पर विविध प्रश्नावली

निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान बताइए :

1. $\log_{19} 6859$

2. $\log \dfrac{\left[\sqrt{\sqrt{625}+11}\right]\left[\sqrt{64}\right]}{\sqrt{\sqrt[5]{3125}+\sqrt[3]{343}}}$

3. ज्ञात है कि $\log 2 \approx 0.3010$ तो $\log 4$ तथा $\log 8$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\log x = 2\log 3 + \frac{1}{3}\log 5 - \log 7$, तो x ज्ञात कीजिए।

5. व्यजंक $x = \dfrac{17^2 . \sqrt[3]{120}}{\sqrt{31.45}}$ का लघुगणक ज्ञात कीजिए।

6. एक धन राशि चक्रवृद्धि ब्याज से 2 वर्ष में 10000 रु तथा 3 वर्ष में 10948 रु हो जाती है। यदि ब्याज वार्षिक संयोजित होता है तो धनराशि एवं वार्षिक ब्याज ज्ञात कीजिए।

7. एक गोले की निकटतम त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका आयतन 139.9 सेमी^{3} है।

8. 57 मी, 63 मी, और 45 मी भुजाओं वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल हैरों (Heron) के सूत्र का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए।

9. 85000 रु मूल्य की एक मशीन के मूल्य में प्रतिवर्ष इसके प्रारम्भिक वर्ष के मूल्य का 4% अवमूल्यन होता है। 4 वर्ष बाद मशीन का मूल्य बताइए।

10. किसी कल्चर (culture) में बैक्टीरिया की प्रति घण्टे वृद्धि की दर इसकी प्रारंभिक घंटा पर जो भी संख्या थी उसका 4% है। यदि कल्चर में एक दिन प्रातः 8 बजे बैक्टीरिया की मूल गिनती 1.5×10^7 थी, तो दोपहर 12 बजे बैक्टीरिया की गिनती बताइए।

11. 1991 की जनगणना के अनुसार भारत की जनसंख्या 8.4×10^7 थी और प्रत्येक वर्ष के प्रारम्भ की जनसंख्या की 2% वृद्धि होती है। 2011 में जनसंख्या बताइए।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

सामान्यतः लघुगणक की खोज का श्रेय स्काटिश गणितज्ञ **जॉन नैपियर** (John Napier) (1550–1617) को प्राप्त है। लैटिन में प्रकाशित **'MIRIFICI LOGARITHMORUM CANONIS DESCRIPTO'** जिसका अर्थ है *'लघुगणक के आश्चर्यजनक नियमों का विवरण'* में अपने परिणामों को प्रकाशित करने से पूर्व उन्होंने इस खोज पर 20 वर्ष तक कार्य किया। अपने अन्वेषण की घोषणा करते हुए नैपियर ने कहा *"गणित के प्रिय विद्यार्थियों, बड़ी संख्याओं का गुणा, भाग, वर्ग तथा घन निकालना जिसमें अत्यधिक समय के अतिरिक्त अनेक अनिश्चित भूलें होती हैं, गणितीय अभ्यास के लिए कष्टसाध्य हैं। इसलिए मैंने अपने मस्तिष्क में सोचना प्रारम्भ किया कि किस निश्चित और सुविचारित कला द्वारा इन अवरोधों को दूर किया जा सके। इसीलिए लघुगणक के आविष्कार से गणनायें न तो अत्यधिक कठिन ही हैं, और न पीड़ा दायक ही, अर्थात् अत्यधिक सरल हो गई हैं।"* लंदन में नैपियर के समकालीन गणित के प्रोफेसर **हेनरी ब्रिग्स** (Henery Briggs) एक माह तक स्काटलैण्ड में नैपियर के साथ विचार–विमर्श में सम्मिलित रहे। उसके परिणाम स्वरूप **"साधारण लघुगणक"** का उद्‌भव हुआ जो नैपियर के मूल विचार का सरलीकरण है और नैपियर ने स्वयं भी इस पर विचार किया था। आज भी लघुगणक जटिल गणितीय गणनाओं को सरल करने की सुविधाजनक सर्वमान्य विधि है।

सम्मिश्र संख्याएँ (COMPLEX NUMBERS)

अध्याय 5

5.1 भूमिका

स्मरण कीजिए कि वास्तविक गुणांकों a, b, c वाले द्विघात समीकरण

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 \quad (1)$$

का हल वास्तविक संख्याओं x_1 तथा x_2 जहाँ

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{तथा} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

द्वारा प्राप्त होता है, यदि $b^2 - 4ac \geqslant 0$ हो। परन्तु $b^2 - 4ac < 0$ के लिए हम (1) का वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में हल नहीं पाते हैं क्योंकि प्रत्येक वास्तविक संख्या का वर्ग ऋणेतर (non negative) होता है। ऋणात्मक विविक्तकर (discriminant) के लिए (1) के हल की गणितीय आवश्यकता हमें एक नये प्रकार की संख्याएँ, नामतः **सम्मिश्र संख्याएँ** (complex numbers), की ओर वास्तविक संख्या पद्धति का विस्तार करने हेतु प्रेरित करती हैं जिनसे ऋण संख्याओं के वर्गमूल प्राप्त किए जा सकते हैं। आइए, हम एक सरल द्विघात समीकरण

$$x^2 + 9 = 0 \quad (2)$$

के हल पर विचार करें। इसका हल

$x = \pm 3\sqrt{-1}$ है।

हम कल्पना करें कि -1 का वर्गमूल, जो संकेतन i से निरूपित है, एक काल्पनिक इकाई (imaginary unit) है। इस प्रकार, दो वास्तविक संख्याओं, a तथा b, के लिए हम एक नई संख्या $a + ib$ बना सकते हैं। यह संख्या $a + ib$ एक **सम्मिश्र संख्या** कहलाती है। सभी सम्मिश्र संख्याओं को समुच्चय C से प्रदर्शित किया जाता है। अतः, वास्तविक संख्याओं से सम्मिश्र संख्याओं की संकल्पना (concept) का विस्तार किसी भी बहुपदीय समीकरण का हल प्रदान करता है। संकेतन i को गणित में सर्वप्रथम विख्यात स्विस गणितज्ञ **लियोनर्ड आयलर** (Leonhard Euler) (1707–1783) ने 1748 में प्रयुक्त किया क्योंकि संभवतः i लैटिन शब्द imaginarius का प्रथम अक्षर है।

इस अध्याय में हम, सम्मिश्र संख्याओं का आलेखीय निरूपण, सम्मिश्र संख्याओं का बीजगणित और उनके मूल निकालने का अध्ययन करेंगे।

5.2 सम्मिश्र संख्याएँ

हम देख चुके हैं कि एक सम्मिश्र संख्या $a + ib$ के रूप में एक संख्या है जिसमें a तथा b वास्तविक संख्याएँ हैं तथा i एक काल्पनिक इकाई है जिसका प्रगुण $i^2 = -1$ है।

दी हुई एक सम्मिश्र संख्या $a + ib$ में a को इसका वास्तविक भाग तथा b को काल्पनिक भाग कहते हैं।

सम्मिश्र संख्याओं के कुछ उदाहरण हैं :

$$\sqrt{3} - i\,2,\ 4 + i\,7,\ -\frac{1}{5} + i, \ldots$$

ध्यान दीजिए कि $\sqrt{3} - i\,2$ में $\sqrt{3}$ वास्तविक भाग तथा –2 काल्पनिक भाग है, और इसी प्रकार अन्य।

एक सम्मिश्र संख्या को अकेले अक्षर जैसे z, w आदि से निरूपित किया जाता है। $z = a + ib$ के वास्तविक तथा काल्पनिक भाग

$$a = Re\ z \text{ तथा } b = \text{Im } z$$

से निरूपित किये जाते हैं। यदि $b = 0$, तो संख्या $a + i\,0 = a$ पूर्णतः एक वास्तविक संख्या है तथा यदि $a = 0$, हो तो संख्या $0 + ib = ib$ एक काल्पनिक संख्या है।

दो सम्मिश्र संख्याएँ $z_1 = a_1 + ib_1$ तथा $z_2 = a_2 + ib_2$ समान होंगी यदि उनके वास्तविक तथा काल्पनिक भाग पृथक–पृथक समान हों। दूसरे शब्दों में,

$z_1 = z_2$ यदि और केवल यदि $a_1 = a_2$ तथा $b_1 = b_2$। एक सम्मिश्र संख्या z शून्य कहलाती है यदि इसके दोनों वास्तविक तथा काल्पनिक भाग शून्य हों। दूसरे शब्दों में,

$$z = a + ib = 0 \text{ यदि और केवल यदि } a = 0 \text{ और } b = 0$$

यह भी ध्यान देना चाहिए कि क्रम संबंध "बड़ा है" और "छोटा है" सम्मिश्र संख्याओं में परिभाषित नहीं है। असमता (inequalities) जैसे $i > 0$, $3 + i < 2$ आदि अर्थहीन हैं।

यदि $z = a+ib$, तो संख्या $a - ib$ को $a + ib$ का **सम्मिश्र संयुग्मी** (conjugate) या साधारणतः **संयुग्मी** कहा जाता है और $\bar{z}$ से निरूपित किया जाता है।

उदाहरण 1 निम्नलिखित को सम्मिश्र संख्याओं के रूप में लिखिए।

(*i*) $\sqrt{-27}$ (*ii*) $4 - \sqrt{-5}$

हल (*i*) $\sqrt{-27} = \sqrt{-1 \times 27} = \sqrt{-1} \times \sqrt{27} = i\sqrt{27}$

(*ii*) $4 - \sqrt{-5} = 4 - \sqrt{-1 \times 5}$

$= 4 - \sqrt{-1} \times \sqrt{5} = 4 - i\sqrt{5}$

उदाहरण 2 निम्नलिखित संख्याओं के वास्तविक तथा काल्पनिक भाग लिखिए :

(*i*) $2 - i\sqrt{2}$ (*ii*) $\frac{\sqrt{5}}{7} i$

हल (*i*) मान लीजिए $z = 2 - i\sqrt{2}$

$\text{Re } z = 2, \text{Im } z = -\sqrt{2}$

(*ii*) मान लीजिए $z = \frac{\sqrt{5}}{7} i = 0 + i\frac{\sqrt{5}}{7}$

$\text{Re } z = 0, \text{Im } z = \frac{\sqrt{5}}{7}$

उदाहरण 3 a तथा b ज्ञात कीजिए ताकि $2a + i\,4b$ और $2i$ एक ही सम्मिश्र संख्या प्रदर्शित करें।

हल हम ऐसे a तथा b ज्ञात करना चाहते हैं जिससे

$$2a + i\,4b = 0 + i\,2$$

दो सम्मिश्र संख्याओं की समानता की परिभाषा से, हम पाते हैं

$$2a = 0, \quad 4b = 2$$

या $$a = 0, \quad b = \frac{1}{2}$$

उदाहरण 4 $2 + i\,5, -6 - i\,7, \sqrt{3}$ के सम्मिश्र संयुग्मी ज्ञात कीजिए।

हल परिभाषा से, संयुग्मी, सम्मिश्र संख्या के काल्पनिक भाग के चिन्ह को बदल (अर्थात् – को + या + को–) कर प्राप्त किया जाता है। अतः अभीष्ट संयुग्मी $2 - i\,5, -6 + i\,7, \sqrt{3}$ हैं।

अभ्यास 5.1

निम्नलिखित को सम्मिश्र संख्याओं के रूप में लिखिए :

1. $\sqrt{-16}$ **2.** $1 + \sqrt{-1}$ **3.** $-1 - \sqrt{-5}$

4. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{7}}$ **5.** $\sqrt{x}, (x > 0)$ **6.** $-b + \sqrt{-4ac}, (a,c > 0)$

निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं के वास्तविक एवम् काल्पनिक भाग लिखिए :

7. $\frac{\sqrt{17}}{2}+\frac{i2}{\sqrt{70}}$ **8.** $-\frac{1}{5}+\frac{i}{5}$ **9.** $\sqrt{37}+\sqrt{-19}$

10. $\sqrt{3}+i\frac{\sqrt{2}}{76}$ **11.** 7 **12.** $3\,i$

निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं के संयुग्मी लिखिए :

13. $3+i$ **14.** $3-i$ **15.** $-\sqrt{5}-i\sqrt{7}$

16. $-i\sqrt{5}$ **17.** $\frac{4}{5}$ **18.** $49-\frac{i}{7}$

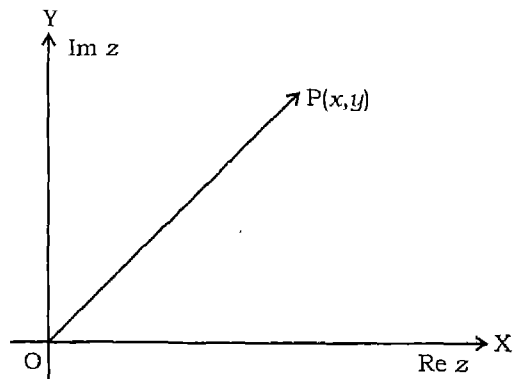
x तथा y के मान बताइए यदि

19. $4x+i(3x-y)=3-i6$

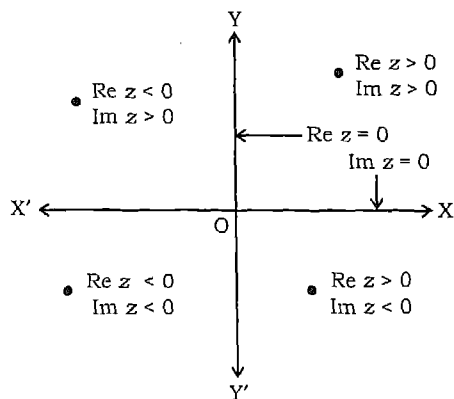
20. $(3y-2)+i(7-2x)=0$

21. $\left(\frac{3}{\sqrt{5}}x-5\right)+i2\sqrt{5}\,y=\sqrt{2}$

5.3 सम्मिश्र संख्या का आलेखीय निरूपण (Graphical Representation of a Complex Number)

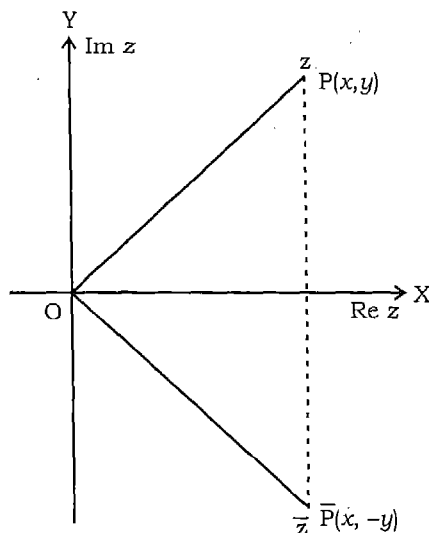
पुनः स्मरण कीजिए कि XOY तल में एक बिन्दु अपने x तथा y निर्देशांक द्वारा अर्थात् वास्तविक संख्याओं के एक क्रमित युग्म (x, y) द्वारा अद्वितीय रूप से ज्ञात किया जाता है। सम्मिश्र संख्याओं को एक तल के किसी बिन्दु से उसी प्रकार संबंधित किया जाता है जैसे वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्म से, जिससे वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्म (x, y) के समुच्चय तथा सम्मिश्र संख्या $x + iy$ के समुच्चय में एक–एक संगतता होती है। यह क्रमित युग्म क्यों है? क्योंकि क्रम महत्वपूर्ण है, उदाहरण के लिए क्रमित युग्म (2, 3), सम्मिश्र संख्या $2 + i\,3$ के संगत है और क्रमित युग्म (3, 2) सम्मिश्र संख्या $3 + i\,2$ के संगत है, जो $2 + i\,3$ से भिन्न है।

आकृति 5.1

इस प्रकार, प्रत्येक सम्मिश्र संख्या $x + iy$ को XOY तल में ज्यामितीय रूप से अद्वितीय बिन्दु $P(x, y)$ (आकृति 5.1) से दर्शाया जा सकता है जिसमें x निर्देशांक इसके वास्तविक भाग और y निर्देशांक इसके काल्पनिक भाग को प्रदर्शित करता है।

x अक्ष पर स्थित बिन्दु $(x, 0)$ सम्मिश्र संख्या $x + i\,0$ अर्थात् वास्तविक संख्या x को प्रदर्शित करता है और प्रत्येक वास्तविक संख्या इस अक्ष पर एक बिन्दु को प्रदर्शित करती है। अतः x अक्ष, वास्तविक अक्ष कहलाती है। वास्तव में, धनात्मक वास्तविक संख्याएँ $Re\, z > 0$, x अक्ष के धन भाग पर बिन्दुओं द्वारा प्रदर्शित की जाती हैं जबकि ऋणात्मक वास्तविक संख्याएँ अर्थात् $Re\, z < 0$, x अक्ष के ऋण भाग पर बिन्दुओं द्वारा और वास्तविक संख्या 0 मूलबिन्दु द्वारा प्रदर्शित की जाती हैं।

आकृति 5.2

इसी प्रकार, y अक्ष का बिन्दु $(0, y)$ सम्मिश्र संख्या $0 + i\,y$, अर्थात् काल्पनिक संख्या iy को निरूपित करता है। इसलिए, y– अक्ष काल्पनिक अक्ष कहलाती है। सभी काल्पनिक संख्याओं को इस अक्ष पर एक बिन्दु द्वारा निरूपित किया जाता है। वास्तव में धनात्मक काल्पनिक संख्याएँ अर्थात् $\text{Im}\, z > 0$, y अक्ष के धन भाग पर बिन्दुओं द्वारा प्रदर्शित की जाती हैं ऋणात्मक और काल्पनिक संख्याएँ $\text{Im}\, z < 0$, ऋणात्मक y अक्ष पर प्रदर्शित की जाती हैं (आकृति 5.2)।

सम्मिश्र संख्या से संबंधित प्रत्येक बिन्दु वाला तल **सम्मिश्र संख्या तल** (या सरल सम्मिश्र तल) कहलाता है। तल के बिन्दुओं द्वारा सम्मिश्र संख्याओं का यह निरूपण **आर्गण्ड आकृति** (Argand diagram) कहलाता है। स्पष्टतः, वास्तविक संख्याओं तथा काल्पनिक संख्याओं के प्रत्येक का समुच्चय सम्मिश्र संख्याओं का उपसमुच्चय है।

मूलबिन्दु से बिन्दु $P(x,y)$ की दूरी सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ का *मापांक* (modulus) (absolute value) परिभाषित है और इसे $|z|$ द्वारा निरूपित किया जाता है (आकृति 5.3)।

आकृति 5.3

अर्थात् $\quad |z| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$

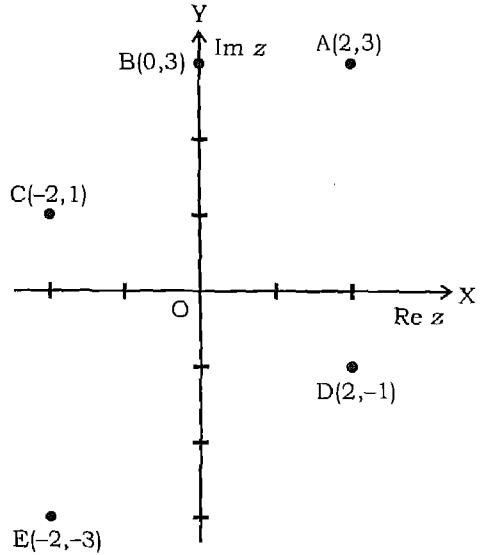
सम्मिश्र संख्या z का संयुग्मी $\bar{z}$ बिन्दु $\bar{P}$ द्वारा निरूपित किया जाता है जो x–अक्ष के सापेक्ष P के सममित है अर्थात् P का x–अक्ष के सापेक्ष दर्पण प्रतिबिम्ब $\bar{P}$ है (आकृति 5.3)।

हम प्रेक्षण करते हैं कि

(*i*) $x = \text{Re } z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, (ii) $y = \text{Im } z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$,

(iii) $z\bar{z} = |z|^2$

उदाहरण 5 सम्मिश्र संख्या $2 + i\,3$ को एक बिन्दु द्वारा सम्मिश्र तल में निरूपित कीजिए।

हल सम्मिश्र संख्या $2 + i\,3$, x–निर्देशांक = Re $(2 + i\,3) = 2$ तथा y– निर्देशांक = Im $(2 + i\,3) = 3$ द्वारा एक बिन्दु से प्रदर्शित करते हैं। बिन्दु A (2, 3) वास्तविक संख्याओं की धन x–अक्ष पर 2 इकाई तथा काल्पनिक संख्याओं की धन y–अक्ष पर 3 इकाई द्वारा चिन्हित है (आकृति 5.4)। इसी प्रकार, आकृति 5.4 में, बिन्दु B शुद्ध काल्पनिक संख्या $i\,3$ या $0 + i\,3$ को प्रदर्शित करता है। अतः हम बिन्दुओं C, D, E को भी इसी प्रकार अंकित कर सकते हैं जो क्रमशः $(-2 + i)$, $(2 - i)$ तथा $(-2 - i\,3)$ के संगत हैं।

आकृति 5.4

प्रश्नावली 5.2

निम्नलिखित संख्याओं और उनके सम्मिश्र संयुग्मियों को एक सम्मिश्र तल पर अंकित कीजिए और उनके निरपेक्ष मान ज्ञात कीजिए :

1. $4 - i\,3$ **2.** $-3 + i\,5$ **3.** 5 **4.** $2\,i$ **5.** $-\dfrac{1}{2} - i\,3$

6. $\sqrt{-3}$ **7.** $-\dfrac{4}{3}\,i$ **8.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$ **9.** 1 **10.** i

11. उन सभी सम्मिश्र संख्याओं को सम्मिश्र तल पर अंकित कीजिए जिनके निरपेक्ष मान 4 हैं।

5.4 सम्मिश्र संख्याओं का बीजगणित

हम अब सम्मिश्र संख्याओं के जोड़, घटाव, गुणा तथा भाग की संक्रियाओं का अध्ययन करेंगे।

5.4.1 सम्मिश्र संख्याओं का योग दो सम्मिश्र संख्याओं $z_1 = a_1 + i\, b_1$ तथा $z_2 = a_2 + i\, b_2$ का जोड़ एक सम्मिश्र संख्या $(a_1+a_2) + i\,(b_1 + b_2)$ अर्थात्

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)$$

के रूप में परिभाषित है।

अतः यह देखते हैं कि ***दो सम्मिश्र संख्याओं के जोड़ के वास्तविक तथा काल्पनिक भाग, उन संख्याओं के वास्तविक से वास्तविक तथा काल्पनिक से काल्पनिक भागों को जोड़ने से प्राप्त होते हैं।***

उदाहरण 6 (*i*) $(3 + i\,7) + (4 + i\,5) = (3+4) + i\,(7+5) = 7 + i\,12$

(*ii*) $(13 - i\,4) + i\,3 = 13 + i\,(-4 + 3) = 13 - i$

सम्मिश्र संख्याओं के योग की संक्रिया में निम्नलिखित प्रगुण होते हैं :

(i) संवरक (Closure) : परिभाषा से, दो सम्मिश्र संख्याओं का योग एक सम्मिश्र संख्या होती है। अतः, सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय जोड़ संक्रिया के अंतर्गत संवरक है।

(ii) क्रम विनिमेय (Commutative) **नियम** : दो सम्मिश्र संख्याओं $z_1 = a + i\,b$ तथा $z_2 = c + i\,d$ के लिए, हम पाते हैं

$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i\,(b + d)$$

$$z_2 + z_1 = (c + id) + (a + ib) = (c + a) + i\,(d + b)$$

लेकिन हम जानते हैं कि दो वास्तविक संख्याओं का योग क्रम विनिमेय है।

इस प्रकार $a + c = c + a\,,\ b + d = d + b$

इसलिए $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

अतः सम्मिश्र संख्याओं का योग क्रम विनिमेय है।

(iii) साहचर्य (*Associative*) **नियम** : तीन सम्मिश्र संख्याएँ लीजिए

$$z_1 = a + ib\,,\ z_2 = c + id,\ z_3 = e + if$$

हम पाते हैं $z_1 + z_2 = (a + c) + i\,(b + d),\ z_2 + z_3 = (c + e) + i\,(d + f)$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = [\,(a + c) + e] + i\,[\,(b + d) + f\,] \quad (1)$$

तथा $z_1 + (z_2 + z_3) = [\,a + (c + e)\,] + i\,[\,b + (d + f)\,]$ (2)

वास्तविक संख्याओं के योग के साहचर्य नियम से हम जानते हैं कि

$$(a + c) + e = a + (c + e), (b + d) + f = b + (d + f)$$

इस प्रकार, (1) तथा (2) का अर्थ है

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

अतः सम्मिश्र संख्याएँ योग के साहचर्य नियम का पालन करती हैं।

(iv) योगात्मक तत्समक अवयव (Additive identity element) : मान लीजिए $a + i b$ योगात्मक तत्समक अवयव है, अर्थात्

$$(x + iy) + (a + ib) = x + iy$$

इससे प्राप्त होता है

$$(x + a) + i (y + b) = x + iy$$

अर्थात् $\quad x + a = x, \ y + b = y$

अर्थात् $\quad a = 0, \ b = 0$

अतः **योगात्मक तत्समक अवयव, सम्मिश्र संख्या** $0 + i\,0$ है जिसे **सरलता से** 0 **लिखते हैं।**

(v) योगात्मक प्रतिलोम (Additive inverse) : मान लीजिए $z = a + ib$ एक सम्मिश्र संख्या है और इसका योगात्मक प्रतिलोम, $w = c + id$ हो, तो

$z + w = 0$ अर्थात् $(a + ib) + (c + id) = 0$

अर्थात् $\quad (a + c) + i (b + d) = 0 + i\,0$

अर्थात् $\quad a + c = 0$ तथा $b + d = 0$

अर्थात् $\quad c = - a$ तथा $d = - b$

अतः $\quad w = c + id = - a + i (-b) = - a - ib = - z$

इस प्रकार $\quad z + (-z) = -z + z = 0$

चूँकि इन दो सम्मिश्र संख्याओं का जोड़, योग का तत्समक अवयव है, अतः वे एक दूसरे के योगात्मक प्रतिलोम हैं।

इस प्रकार, उपर्युक्त (*i*) से (*v*) तक सिद्ध किया जा चुका है कि सम्मिश्र संख्याओं में योग की संक्रिया संवरक, क्रम विनिमेय, साहचर्य है, तत्समक अवयव रखती है और C के प्रत्येक सदस्य का योगात्मक प्रतिलोम है।

उदाहरण 7 $\frac{2}{3} + i\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}i$ और $\frac{-5}{4} - i$ का योग ज्ञात कीजिए।

हल योग के साहचर्य नियम के प्रयोग से, हम पाते हैं

$$\left[\left(\frac{2}{3}+i\frac{5}{3}\right)+\left(0-i\frac{2}{3}\right)\right]+\left(\frac{-5}{4}-i\right)=\left(\frac{2}{3}+i\right)+\left(\frac{-5}{4}-i\right)=\frac{-7}{12}$$

उदाहरण 8 $-5 + i\,7$ का योगात्मक प्रतिलोम बताइए।

हल मान लीजिए $z = -5 + i\,7$. योगात्मक प्रतिलोम $-z$, z के चिह्न परिवर्तन करने से प्राप्त होता है। अर्थात् $-z = 5 - i\,7$.

5.4.2 सम्मिश्र संख्याओं का व्यवकलन (Subtraction)

हम जानते हैं कि दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 और z_2 के लिए एक ऐसी सम्मिश्र संख्या z संभव है जिसके लिए

$z_1 + z = z_2$. यह संख्या z, $z_2 - z_1$ से निरूपित की जाती है।

मान लीजिए $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ तथा $z = x + iy$,

तब $z_1 + z = z_2$ या $(a + ib) + (x + iy) = c + id$

अर्थात् $(a + x) + i\,(b + y) = c + id$

अर्थात् $a + x = c,\ b + y = d$

इस समीकरण निकाय का अद्वितीय हल

$x = c - a,\ \ y = d - b$ है।

इस प्रकार $z = (c-a) + i\,(d-b)$

निष्कर्षतः, अन्तर $z_2 - z_1$ सदैव संभव है जहाँ

$$z = z_2 - z_1 = (c + id) - (a + ib) = (c - a) + i\,(d - b), \qquad (1)$$

जिससे सम्मिश्र संख्याओं के घटाव का नियम प्राप्त होता है।

उदाहरण 9 सम्मिश्र संख्याओं $z_1 = -3 + i\,2$ तथा $z_2 = 13 - i$ का अन्तर ज्ञात कीजिए।

हल समीकरण (1) के प्रयोग से

$$\begin{aligned} z_2 - z_1 &= (13 - i) - (-3 + i2) \\ &= (13 - (-3)) + i\,(-1 - 2) = 16 - i\,3 \end{aligned}$$

5.4.3 सम्मिश्र संख्याओं का गुणन : दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 $(= a+ib)$ तथा $z_2(= c + i\,d)$ का गुणन एक सम्मिश्र संख्या के रूप में परिभाषित है जो इन दो संख्याओं के गुणा द्वारा द्विपद की

भाँति बीजगणित के नियमों का पालन करते हुए तथा i^2 को -1 से प्रतिस्थापित करके प्राप्त किया जाता है। हम पाते हैं

$$z_1z_2 = (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd$$
$$= (ac - bd) + i(ad + bc)$$

उदाहरण 10 $2 + i\,3$ को $5 + i\,4$ से गुणा कीजिए।

हल $(2 + i\,3)(5 + i\,4) = (2 \times 5 - 3 \times 4) + i(2 \times 4 + 3 \times 5)$

$$= (10 - 12) + i(8 + 15) = -2 + i\,23$$

उपर्युक्त गुणा की संक्रिया में, हमने गुणा $i.i$ के लिए संक्षिप्त संकेतन i^2 प्रयुक्त किया है इसी क्रम में हम i की विभिन्न घातों के लिए संक्षिप्त सूत्र देना चाहेंगे।

$$i.i = i^2 \quad \text{अर्थात्} \quad i^2 = \sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -1$$

इस प्रकार $i^3 = i^2.i = -i$

$$i^4 = i^2.i^2 = +1$$
$$i^5 = i^4.i = i$$

और इस प्रकार अन्यः।

क्या आप i की उपर्युक्त घातों में प्रतिरूप (pattern) देखते हैं? i की प्रथम चार घातें बिल्कुल भिन्न हैं, लेकिन इसके बाद 4 के क्रम में पुनरावृत्ति होती है। उदाहरणतः $i^{17} = i^{16}.i = i$ क्योंकि i^{16}, i^4 की घात है इसलिए 1 के बराबर हुई, $i^{23} = -i$ और इस प्रकार अन्य।

इस प्रकार, किसी पूर्ण संख्या k के लिए

$$i^{4k} = 1, \qquad i^{4k+1} = i$$
$$i^{4k+2} = -1, \qquad i^{4k+3} = -i$$

उदाहरण 11 दिखाइए $i^{12} + i^{13} + i^{14} + i^{15} = 0$

हल हम पाते हैं

$$i^{12} + i^{13} + i^{14} + i^{15} = 1 + i - 1 - i = 0$$

आइए, सम्मिश्र संख्याओं के गुणन के गुणधर्मों का अध्ययन करें।

(i) **संवरक** परिभाषा से दो सम्मिश्र संख्याओं का गुणन एक सम्मिश्र संख्या है। अतः, सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय गुणा के अंतर्गत संवरक है।

(ii) **क्रमविनिमेय नियम** दो सम्मिश्र संख्याओं $z_1 = a + ib$ तथा $z_2 = c + id$ के लिए, हम पाते हैं,

$$z_1 z_2 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) \quad (1)$$

$$z_2 z_1 = (c + id)(a + ib) = (ca - db) + i(cb + da) \quad (2)$$

लेकिन a, b, c, d वास्तविक संख्याएँ हैं, इसलिए

$$ac - bd = ca - db, \; ad + bc = cb + da. \quad (3)$$

समीकरण (1), (2) तथा (3) से निष्कर्ष निकलता है कि $z_1 z_2 = z_2 z_1$ अर्थात् सम्मिश्र संख्याओं का गुणन क्रम विनिमेय है।

(iii) साहचर्य नियम तीन सम्मिश्र संख्याएँ $z_1 = a + ib, z_2 = c + id, z_3 = e + if$ तथा उनके गुणनफल $(z_1 z_2) z_3$ तथा $z_1 (z_2 z_3)$ पर विचार कीजिए, हम पाते हैं

$$
\begin{aligned}
(z_1 z_2) z_3 &= [(a + ib)(c + id)](e + if) \\
&= [(ac - bd) + i(ad + bc)](e + if) \\
&= (ac - bd)e + i(ad + bc)e + i(ac - bd)f + i^2(ad + bc)f \\
&= (ace - bde - adf - bcf) + i(ade + bce + acf - bdf) \quad (1)
\end{aligned}
$$

इसी प्रकार, $z_1 (z_2 z_3) = (a + ib)[(c + id)(e + if)]$

$$= (ace - adf - bcf - bde) + i(acf + ade + bce - bdf) \quad (2)$$

इस प्रकार, (1) और (2) से निष्कर्ष निकलता है

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

अतः, सम्मिश्र संख्याएँ गुणा के साहचर्य नियम का पालन करती हैं।

(iv) गुणात्मक का तत्समक अवयव (Multiplicative identity) मान लीजिए कि $a + ib$ का गुणात्मक तत्समक अवयव $(c + id)$ हो, तो

$$(a + ib)(c + id) = (a + ib) \text{ (सभी सम्मिश्र संख्याओं के लिए)}$$

अर्थात् $(ac - bd) + i(ad + bc) = a + ib$.

अर्थात् $ac - bd = a, \; ad + bc = b$

अर्थात् $a(c - 1) = bd \quad (1)$

अर्थात् $b(c - 1) = -ad \quad (2)$

समीकरण (1) तथा (2) के दोनों पक्षों को क्रमशः a तथा b से गुणा करके जोड़ने पर, हम पाते हैं

$$(a^2 + b^2)(c - 1) = 0$$

चूँकि $a^2 + b^2 \neq 0$, इस प्रकार $c = 1$

इसलिए $d = 0$

इस प्रकार, $c + id = 1 + i\,0 = 1$

अत: *सम्मिश्र संख्या* $1 + i\,0$, *जिसे साधारणत:* 1 *लिखा जाता है,* ***गुणात्मक तत्समक अवयव है,***

अर्थात् $1\,.\,(a + ib) = (a + ib).1 = a + ib$

(v) गुणात्मक प्रतिलोम (Multiplicative inverse) एक सम्मिश्र संख्या w, सम्मिश्र संख्या z का गुणात्मक प्रतिलोम कहलायेगी यदि $zw = 1$ हो। z का गुणात्मक प्रतिलोम w है तथा इसे z^{-1} से निरूपित किया जाता है।

मान लीजिए $z = a + ib$ एक सम्मिश्र संख्या है और $w = c + id$, इसका गुणात्मक प्रतिलोम है, तब

$$zw = 1$$

अर्थात् $(a + ib)\,(c + id) = 1 + i.0$

अर्थात् $(ac - bd) + i\,(ad + bc) = 1 + i.0$

अर्थात् $ac - bd = 1$ (1)

$ad + bc = 0$ (2)

समीकरण (1) तथा (2) के निकाय के हल का अस्तित्व है जो निम्न है :

$$c = \frac{a}{(a^2 + b^2)},\ d = \frac{-b}{(a^2 + b^2)} \text{ जबकि } a^2 + b^2 \neq 0$$

हम, इस प्रकार, देखते हैं कि किसी भी सम्मिश्र संख्या $z = a + ib \neq 0$ का गुणात्मक प्रतिलोम $w\,(= z^{-1})$ का अस्तित्व है जो निम्न प्रकार है

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2} = (a - ib)\,\frac{1}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}\,.$$

z के गुणात्मक प्रतिलोम को इसका *व्युत्क्रम (Reciprocal)* भी कहते हैं और इसे $\frac{1}{z}$ द्वारा निरूपित किया जाता है। इस प्रकार, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि ***सम्मिश्र संख्या 0 के अतिरिक्त प्रत्येक सम्मिश्र संख्या का गुणात्मक प्रतिलोम होता है जिसे*** z^{-1} ***से निरूपित किया जाता है जबकि*** $z\,z^{-1} = 1$

उदाहरण 12 $-3 + 4i$ का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $z = -3 + 4i$

तो, $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{-3 - i4}{9 + 16} = \dfrac{-3}{25} - i\dfrac{4}{25}$

(iv) **बंटन नियम** (Distributive Law) हम जाँच करते हैं कि क्या सम्मिश्र संख्याओं में गुणन के योग पर बंटन नियम अर्थात्

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3, \ (z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$$

का पालन होता है।

आइए, हम सम्मिश्र संख्याओं $z_1 = a + ib, z_2 = c + id$ तथा $z_3 = e + if$ पर विचार करें, हम पाते हैं

$$\begin{aligned}
z_1(z_2 + z_3) &= (a + ib)[(c + id) + (e + if)] \\
&= (a + ib)[(c + e) + i(d + f)] \\
&= [a(c + e) - b(d + f)] + i[a(d + f) + b(c + e)] \\
&= (ac + ae - bd - bf) + i(ad + af + bc + be) \\
&= [(ac - bd) + i(ad + bc)] + [(ae - bf) + i(af + be)] \\
&= z_1 z_2 + z_1 z_3.
\end{aligned}$$

इसी प्रकार

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2)z_3 &= [(a + ib) + (c + id)](e + if) \\
&= [(a + c) + i(b + d)](e + if)] \\
&= [(a + c)e - (b + d)f] + i[(a + c)f + (b + d)e] \\
&= [ae + ce - bf - df] + i[af + cf + be + de] \\
&= [(ae - bf) + i(af + be)] + [(ce - df) + i(cf + de)] \\
&= z_1 z_3 + z_2 z_3
\end{aligned}$$

अतः हम निष्कर्ष निकालते हैं कि सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय बंटन नियम का पालन करता है।

5.4.4 सम्मिश्र संख्याओं में भाग संक्रिया

हम जानते हैं कि सम्मिश्र संख्याओं z_1 और $z_2 \neq 0$ के लिए एक ऐसी सम्मिश्र संख्या z का अस्तित्व है ताकि

$$z_1 = z.z_2 \qquad (1)$$

यह संख्या z, $\frac{z_1}{z_2}$ द्वारा निरूपित है, तथा सम्मिश्र संख्या z_1 का $z_2 (\neq 0)$ से भाजन, कहलाती है। वास्तव में सम्मिश्र संख्याओं का भाजन, गुणन संक्रिया की प्रतिलोम संक्रिया है। दो सम्मिश्र संख्याओं के भागफल ज्ञात करने की विधि निम्नवत् है :

आइए हम दो सम्मिश्र संख्याओं $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$, पर विचार करें, हम पाते है

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}$$ (अंश व हर में $\overline{z_2}$ से गुणा करने पर)

$$= \frac{(ac+bd)}{(c^2+d^2)} + i\frac{(bc-ad)}{(c^2+d^2)} \qquad (2)$$

उदाहरण 13 सम्मिश्र संख्याएँ $z_1 = 3 + i$ तथा $z_2 = 1 + i$ दी हुई हैं, भागफल $\frac{z_2}{z_1}$ ज्ञात कीजिए।

हल सूत्र (2) का प्रयोग करते हुए, हम भागफल पाते हैं

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1+i}{3+i} = \frac{(1+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{4+i2}{9+1} = \frac{2}{5} + \frac{i}{5}.$$

उपर्युक्त चर्चा से, हम देखते हैं कि योग, घटाव, गुणा तथा भाग के सभी नियम जिनका वास्तविक संख्याओं के प्रान्त (domain) के लिए पालन होता हैं, वे सम्मिश्र संख्याओं के लिए भी सत्य हैं। इन संक्रियाओं से हम विचार सकते हैं कि सम्मिश्र संख्याएँ, वास्तविक संख्याओं का व्यापक रूप हैं और वास्तविक संख्याऐं, सम्मिश्र संख्याओं की विशेष स्थिति की भाँति समझी जा सकती हैं। इसी कारण से सम्मिश्र संख्या $a + i\,0$ जो क्रमित रूप में $(a, 0)$ लिखी जाती है को वास्तविक संख्या a के रूप में पहचाना जा सकता है तथा सम्मिश्र संख्या $0 + i\,b$ जिसको क्रमित युग्म के रूप में $(0, b)$ लिखा जाता है, काल्पनिक संख्या $i\,b$ के रूप में पहचानी जाती है।

उदाहरण 14 सम्मिश्र संख्याओं $-\sqrt{3}+\sqrt{-2}$ तथा $2\sqrt{3}-i$ का योगफल तथा गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $z_1 = -\sqrt{3}+\sqrt{-2} = -\sqrt{3}+i\sqrt{2}$

और $z_2 = 2\sqrt{3}-i$

तब $z_1+z_2 = (-\sqrt{3}+i\sqrt{2})+(2\sqrt{3}-i)$

$$= (-\sqrt{3}+2\sqrt{3})+i(\sqrt{2}-1) = \sqrt{3}+i(\sqrt{2-1})$$

$$z_1z_2 = (-\sqrt{3}+i\sqrt{2})(2\sqrt{3}-i)$$

$$= (-6+\sqrt{2})+\text{i}(\sqrt{3}+2\sqrt{6})$$

उदाहरण 15 सम्मिश्र संख्या $z = \frac{2+i}{(1+i)(1-i2)}$ को $x + iy$ रूप में लिखिए।

हल $z = \frac{2+i}{(1+i)(1-i2)} = \frac{2+i}{3-i} = \frac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$

$= \frac{5+i5}{10} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$

उदाहरण 16 $2 + i\sqrt{3}$ का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $z = 2 + i\sqrt{3}$ तो $\bar{z} = 2 - i\sqrt{3}$

इसलिए $|z|^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 = 7$

इस प्रकार, $2 + i\sqrt{3}$ का गुणात्मक प्रतिलोम निम्नवत् है

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{2 - i\sqrt{3}}{7} = \frac{2}{7} - i\frac{\sqrt{3}}{7}.$$

प्रश्नावली 5.3

निम्नलिखित प्रश्न 1 से 27 तक प्रत्येक में निर्देशित संक्रियाएँ कीजिए तथा उत्तर को $x + iy$ के रूप में लिखिए

1. $(2i)^3$

2. $(8i)\left(-\frac{1}{8}i\right)$

3. $i^6 + i^8$

4. $i + i^2 + i^3 + i^4$

5. $i^9 + i^{10} + i^{11} + i^{12}$

6. $i^4 + i^8 + i^{12} + i^{16}$

7. $i + i^5 + i^9 + i^{13}$

8. i^{-38}

9. $(5 + i4) + (5 - i4)$

10. $-(-1 + i) + i7 - 5$

11. $3(7 + i7) + i(7 + i7)$

12. $(1 - i) - (-1 + i6)$

13. $\left(\frac{1}{5} + i\frac{2}{5}\right) - \left(4 + i\frac{5}{2}\right)$

14. $(7 - i2) - (4 + i) + (-3 + i5)$

15. $\left[\left(\frac{1}{3} + i\frac{7}{3}\right) + \left(4 + i\frac{1}{3}\right)\right] - \left(-\frac{4}{3} + i\right)$

16. $i^3 + (6 + i3) - (20 + i5) + (14 + i3)$

17. $\sqrt{3} + (\sqrt{3} - i2) - (3 - i2)$

18. $(1 + i)^4$

19. $(7 + i5)(7 - i5)$

20. $3i^3(15i^6)$

21. $\left(\frac{1}{2}+i\,2\right)^3$

22. $\left(-2-i\frac{1}{3}\right)^3$

23. $\left(\sqrt{6}+i\,5\right)\left(\sqrt{6}-i\frac{1}{5}\right)$

24. $(5 + i\,9) \div (-3 + i\,4)$

25. $(-2 - i5) \div (3 - i6)$

26. $\left[\left(\sqrt{5}+\frac{i}{2}\right)\left(\sqrt{5}-i\,2\right)\right] \div (6+i5)$

27. $\frac{[(\sqrt{2}+i\sqrt{3}+(\sqrt{2}-i\sqrt{3})]}{[(\sqrt{3}+i\sqrt{2})+(\sqrt{3}-i\sqrt{2})]}$

निम्नलिखित के गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए :

28. $4 - i3$ 29. $(\sqrt{5}+i3)$ 30. $-i.$

5.5 सम्मिश्र संख्याओं के कुछ गुणधर्म

आप पुनः स्मरण कर सकते हैं कि सम्मिश्र संख्या $a + ib$ तथा $a - ib$ एक दूसरे के **संयुग्मी** कहलाती हैं। अब हम संयुग्मियों के कुछ रोचक गुणधर्मों पर विचार करेंगे :

(I) एक सम्मिश्र संख्या z के संयुग्मी का संयुग्मी सम्मिश्र संख्या स्वयं होती है, अर्थात्

$\overline{(\overline{z})} = z$

उपपत्ति मान लीजिए $z = a + i\,b$

तो $\overline{z} = a - ib$, $\overline{(\overline{z})} = a + i\,b = z$

(II) दो सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2 के योग का संयुग्मी उनके संयुग्मियों का जोड़ होता है अर्थात् $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

उपपत्ति मान लीजिए $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$. तो

$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i\,(b + d),$$

$$\overline{z}_1 = a - ib,\ \overline{z}_2 = c - id$$

और $$\overline{z}_1 + \overline{z}_2 = (a - ib) + (c - id) = (a + c) - i(b + d)$$

इस प्रकार $$\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - i(b + d) = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$$

(III) दो सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2 के गुणनफल का संयुग्मी, उनके संयुग्मियों के गुणनफल के बराबर होता है, अर्थात् $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$

उपपत्ति मान लीजिए $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$, हैं तो

$$z_1 z_2 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$\bar{z}_1 = a - ib, \ \bar{z}_2 = c - id$$

और $$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (a - ib)(c - id) = (ac - bd) - i(ad + bc)$$

इस प्रकार $$\overline{z_1 z_2} = (ac - bd) - i(ad + bc) = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

(IV) दो सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2 ($z_2 \neq 0$) के भागफल का संयुग्मी, उनके संयुग्मियों का भागफल होता है अर्थात् $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

उपपत्ति मान लीजिए $z_1 = a + i\,b$, $z_2 = c + id$, तो

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - i\frac{ad - bc}{c^2 + d^2}$$

इस प्रकार $$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{ad - bc}{c^2 + d^2}$$

अतः $$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{a - ib}{c - id} = \frac{(a - ib)(c + id)}{(c - id)(c + id)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{ad - bc}{c^2 + d^2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$$

आइए, अब हम सम्मिश्र संख्याओं के निरपेक्ष मानों के कुछ गुणधर्मों पर विचार करें :

(V) दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के गुणनफल का निरपेक्ष मान, संख्याओं के निरपेक्ष मानों के गुणनफल के बराबर होता है, अर्थात्

$$|z_1 z_2| = |z_1|.|z_2|$$

उपपत्ति पुनःस्मरण कीजिए कि सम्मिश्र संख्या z के लिए, $z\bar{z} = |z|^2$

अतः $$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 z_2)(\bar{z}_1 \bar{z}_2)$$

$$= (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2$$

दोनों पक्षों का वर्गमूल, धन चिह्न सहित लेने पर, हम पाते हैं

$$|z_1 z_2| = |z_1|.|z_2|$$

(VI) दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा $z_2 (\neq 0)$ के भागफल का निरपेक्ष मान, अंश तथा हर के निरपेक्ष मानों के भागफल के बराबर होता है।

अर्थात् $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0.$$

उपपत्ति चूँकि, $z_1 = \left(\frac{z_1}{z_2}\right) z_2$ हम पाते हैं

$$|z_1| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| |z_2|.$$

अतः $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

(VII) दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के जोड़ का निरपेक्ष मान कभी उनके निरपेक्ष मानों के जोड़ से बड़ा नहीं हो सकता है,

अर्थात् $$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

इस असमिका को **त्रिभुज असमिका** कहते हैं।

उपपत्ति हमें ज्ञात है कि

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1+z_2)\,\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \\ &= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\ \text{Re}\ z_1\bar{z}_2 \qquad (1) \end{aligned}$$

एक सम्मिश्र संख्या $x + i\,y$ का वास्तविक भाग, उसके निरपेक्ष मान से कभी अधिक नहीं हो सकता है क्योंकि

$$x \leq \sqrt{x^2 + y^2},$$

अतः $$\text{Re}\ z_1\bar{z}_2 \leq |z_1\bar{z}_2| = |z_1|\,|\bar{z}_2| = |z_1|\,|z_2| \qquad (2)$$

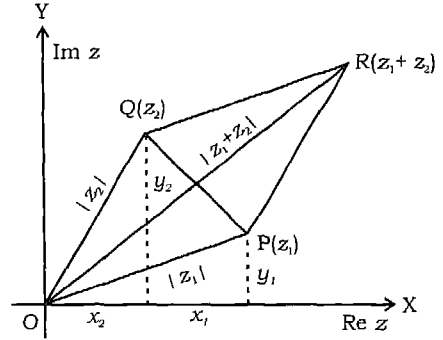
समीकरण (2) को (1) में प्रयोग करके, हम पाते हैं,

$$|z_1 + z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,|z_1|\,.\,|z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$$

अतः धनात्मक वर्गमूल लेने पर, हम पाते हैं,

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

ज्यामितीय व्याख्या (Geometrical Interpretation)

मान लीजिए बिन्दु P, Q सम्मिश्र तल में क्रमशः दो सम्मिश्र संख्याओं $z_1 = x_1 + i\,y_1, z_2 = x_2 + i\,y_2$ को प्रदर्शित करते हैं, जिसको आकृति 5.5 में दर्शाया गया है। मूल बिन्दु O को बिन्दुओं P तथा Q से मिलाइए तथा समान्तर चतुर्भुज OPRQ को पूरा कीजिए। आकृति से स्पष्ट है कि R के निर्देशांक $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ हैं और यह सम्मिश्र संख्या $(x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$ अर्थात् $z_1 + z_2$ को प्रदर्शित करता है।

आकृति 5.5

z_1, z_2 तथा $(z_1 + z_2)$ के निरपेक्ष मान ज्यामिति से निम्न प्रकार हैं:

$$|z_1| = OP\ ,\ |z_2| = OQ = PR \text{ तथा } |z_1 + z_2| = OR.$$

हम जानते हैं कि किसी त्रिभुज में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है। अतः ΔORP में, हम पाते हैं

$$OR \leqslant OP + PR \text{ अर्थात् } |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

यहाँ समता केवल तभी सत्य हैं जबकि O, P, Q एक सरल रेखा में हैं। इसी कारण से सम्मिश्र संख्याओं के निरपेक्ष मानों की असमिका को त्रिभुज असमिका कहते हैं।

परिमित आगमन द्वारा इस असमिका का n सम्मिश्र संख्याओं तक विस्तार किया जा सकता है, अर्थात् n सम्मिश्र संख्याओं $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$; के लिए, हम प्राप्त कर सकते हैं

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3| + \ldots + |z_n|$$

(VIII) दो सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2 के अन्तर का निरपेक्ष मान उनके निरपेक्ष मानों के अन्तर से कभी कम नहीं हो सकता है।

अर्थात् $\quad |z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$

उपपत्ति मान लीजिए $|z_1| \geqslant |z_2|$

अब $\quad z_1 = z_1 - z_2 + z_2$, अर्थात् $|z_1| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2|$

इस प्रकार, $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2| \qquad (1)$

z_1 तथा z_2 को परस्पर बदलने पर, हम पाते हैं

$$|z_2| - |z_1| \leqslant |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2| \qquad (2)$$

असमिकाओं (1) तथा (2) को संयुक्त करने पर, हम पाते हैं,

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

या $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

ज्यामितीय व्याख्या

आकृति 5.6 में, Q′ सम्मिश्र संख्या $-z_2$ को निरूपित करता है।

समान्तर चतुर्भुज OQ′R′P को पूरा करके, हम पाते हैं कि

$$OR' = |z_1 - z_2|,$$

$$OQ' = |-z_2| = |z_2|,$$

तथा $Q'R' = OP = |z_1|$

आकृति 5.6

एक त्रिभुज की दो भुजाओं का निरपेक्ष अन्तर तीसरी से छोटा होता है। अतः, ΔOR′Q′ से, हम पाते हैं कि

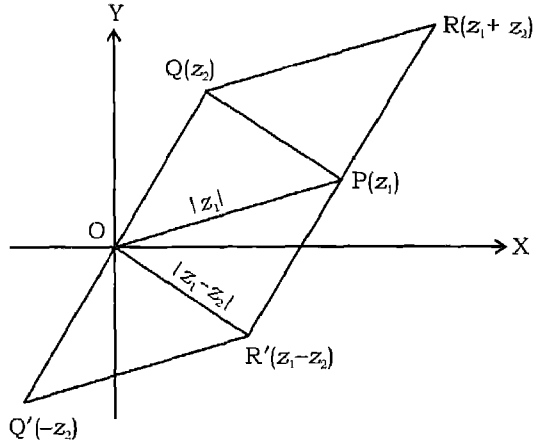
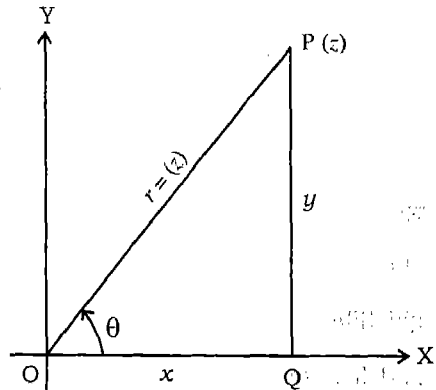
$$OR' \geq Q'R' - OQ'$$

अर्थात् $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

यह असमिका भी त्रिभुज असमिका कहलाती है।

5.6 सम्मिश्र संख्याओं का ध्रुवीय रूप (Polar form)

मान लीजिए P अशून्य सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ को प्रदर्शित करता है। मान लीजिए कि दिष्ट रेखा खण्ड OP की लम्बाई r है और यह x – अक्ष के धन भाग से θ कोण बनाता है। θ को रेडियन में मापा गया है (2π रेडियन 360^0 के बराबर होते हैं।)

हम ध्यान दें कि P वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्म (r, θ) से अद्वितीय रूप से निर्धारित किया जाता है। (r, θ) बिन्दु P के ध्रुवीय निर्देशांक कहलाते हैं (आकृति 5.7)।

आकृति 5.7

हम मूल बिन्दु को ध्रुव (Pole) तथा x–अक्ष की धन दिशा को **प्रारम्भिक रेखा** (initial line) **(ध्रुवीय अक्ष)** मानते हैं।

ΔOPQ से हम पाते हैं

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ ,\ \tan\theta\ =\ \frac{y}{x}$$

इस प्रकार, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ सम्मिश्र संख्या का ध्रुवीय रूप या त्रिकोणमितीय रूप है जहाँ r, सम्मिश्र संख्या z का **मापांक** (modulus) **या निरपेक्ष मान** (absolute value) कहा जाता है तथा θ सम्मिश्र संख्या z का **कोणांक** (argument) या **आयाम** (amplitude) कहलाता है तथा **कोणांक** z (या arg z) से निरूपित होता है। अतः,

$$r = |z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$$

तथा $$\theta\ = \text{कोणांक}\ z = \text{कोणांक}\ (x+iy) = \tan^{-1}\ \frac{y}{x}$$

टिप्पणी एक सम्मिश्र संख्या का कोणांक धनात्मक होता है यदि दक्षिणावर्त (anticlockwise) दिशा में मापा जाता है अन्यथा ऋणात्मक। संयुग्मी सम्मिश्र संख्याएँ $z = x + iy$ तथा $\bar{z} = x - iy$ दोनों के मापांक समान हैं अर्थात् $|z| = |\bar{z}|$ और उनके कोणांक का निरपेक्ष मान समान है लेकिन वे चिन्हों में विपरीत होते हैं

अर्थात् कोणांक $z = -$ कोणांक $\bar{z}$

स्पष्टतः, $r \geqslant 0$, और $0 \leqslant \theta < 2\pi$ क्योंकि θ रेडियन में मापा जाता है।

हमें r के प्रत्येक धनात्मक मान और 0 और 2π के मध्य प्रत्येक θ के मान के लिए, सम्मिश्र तल में ध्रुवीय निर्देशांक (r, θ) से एक अद्वितीय बिन्दु प्राप्त होता है और विलोमतः, मूल बिन्दु छोड़कर तल के प्रत्येक बिन्दु के लिए अद्वितीय ध्रुवीय निर्देशांक (r, θ) होते हैं जहाँ $r > 0$ तथा $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

संख्या $z = 0$ के लिए कोणांक θ परिभाषित नहीं है तथा मापांक $r = 0$ से यह संख्या पहचानी जाती है।

उदाहरण 17 सम्मिश्र संख्या $z = 1 + i\sqrt{3}$ को ध्रुवीय रूप में निरूपित कीजिए।

हल हम पाते हैं $x + iy = 1 + i\sqrt{3}$

अर्थात् $\quad x = 1\ ,\ y = \sqrt{3}$

इसलिए $\quad r = \sqrt{(x^2 + y^2)}\ = 2$

और $\tan\theta = \frac{y}{x} = \sqrt{3}, \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

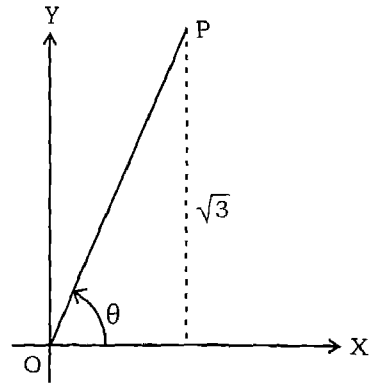
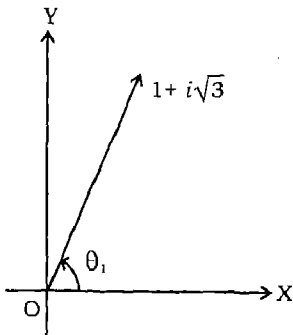
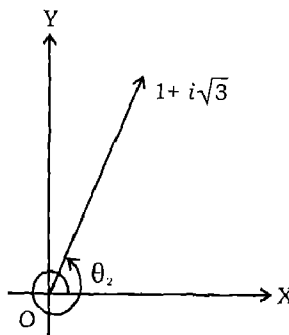
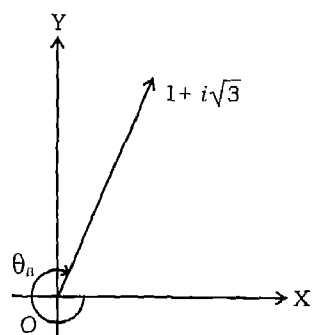
इस प्रकार $P(1 + i\sqrt{3})$ के ध्रुवीय निर्देशांक $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ हैं (आकृति 5.8)।

तथा इसका ध्रुवीय रूप $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ है।

आकृति 5.8

यहां यह ध्यान भी दिया जा सकता है कि यदि सम्मिश्र संख्या के कोणांक पर प्रतिबन्ध $0 \leqslant \theta < 2\pi$ में छूट दे दी जाती है तो θ अद्वितीय रूप से परिभाषित नहीं होता है। संख्या z के सम्भावित कोणांक निम्नलिखित कोण हैं :

$$\theta_1 = \frac{\pi}{3}, \theta_2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi, \theta_3 = \frac{\pi}{3} - 2\pi, \ldots, \theta_k = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

जहाँ k स्वेच्छ पूर्णांक हैं (आकृति 5.9)।

आकृति 5.9

हम प्रेक्षण करते हैं कि एक सम्मिश्र संख्या के रेडियन माप के दो कोणांकों का अन्तर एक संख्या है जो 2π का अपवर्त्य है। उपर्युक्त उदाहरण में $\theta_2 - \theta_3$, 4π के बराबर है।

उदाहरण 18 सम्मिश्र संख्याओं $z_1 = -i$ तथा $z_2 = 1$ के मापांक तथा कोणांक ज्ञात कीजिए।

हल सम्मिश्र संख्या $z_1 = -i$ के लिए, हम पाते हैं

$$x + iy = -i \text{ अर्थात् } x = 0, \ y = -1$$

इस प्रकार, $r = 1, \theta_1 = -\frac{\pi}{2}$ (आकृति 5. 10)।

परिणामतः $|z_1| = 1$, कोणांक $z_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, जहाँ k एक पूर्णांक है।

इसी प्रकार $|z_2| = 1$, कोणांक $z_2 = 2\pi k$, जहाँ k एक पूर्णांक है।

Y

X

O

$z_2 = 1$

$z_1 = -i$

आकृति 5.10

आइए, अब हम ध्रुवीय रूप में दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के गुणनफल पर विचार करें, मान लीजिए दो सम्मिश्र संख्याएँ $z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$, और $z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$, हैं तो

$$z_1 z_2 = r_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)\, r_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2)] \quad (1)$$

सूत्र के प्रयोग से

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2,$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2,$$

(1) से, हम पाते हैं

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

अतः $|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1| . |z_2|$ तथा कोणांक $(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 =$ कोणांक z_1 + कोणांक z_2

दूसरे शब्दों में, *दो सम्मिश्र संख्याओं का गुणनफल एक सम्मिश्र संख्या है जिसका निरपेक्ष मान उनके निरपेक्ष मानों का गुणनफल है तथा गुणनफल का कोणांक उन संख्याओं के कोणांकों का योग है।*

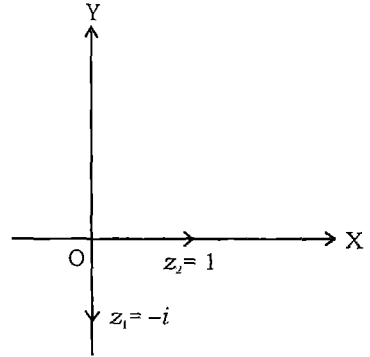
इसी प्रकार, हम तीन सम्मिश्र संख्याओं के लिए सिद्ध कर सकते हैं कि

$$|z_1 . z_2 . z_3| = |z_1| . |z_2| . |z_3|,$$

कोणांक $(z_1 . z_2 . z_3)$ = कोणांक (z_1) + कोणांक (z_2) + कोणांक (z_3)

और इस प्रकार अन्य।

गुणनफल $z_1 z_2$ का ज्यामितीय निरूपण

मान लीजिए बिन्दुओं P_1 तथा P_2 से सम्मिश्र संख्याएँ $z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$ तथा $z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$ से प्रदर्शित हैं (आकृति 5.11) जिसमें O मूल बिन्दु तथा I वास्तविक

अक्ष पर संख्या 1 को निरूपित करने वाला बिन्दु है, तो बिन्दुओं O, P_1, I, ΔOP_1I के शीर्ष हैं। आकृति 5.11 में दिखाए अनुसार कोण OIP_1 को ϕ से निरूपित कीजिए।

आकृति 5.11

रेखाखण्ड OP_2 से θ_1 कोण बनाती हुई रेखा OP खींचिए और P_2 से दूसरा रेखाखण्ड P_2P, OP_2 से ϕ कोण बनाता हुआ खींचिए जो रेखाखण्ड OP को बिन्दु P पर काटता है।

अब बिन्दु P सम्मिश्र संख्या z_1z_2 को प्रदर्शित करेगा क्योंकि

$$\angle P_1OI = \angle POP_2 = \theta_1$$

तथा $$\angle P_1IO = \angle PP_2O = \phi$$

हम पाते हैं कि ΔOP_1I, ΔOPP_2 के समरूप है। अतः संगत भुजाएँ समानुपाती हैं।

अर्थात् $$\frac{OP}{r_1} = \frac{r_2}{1}$$

इस प्रकार, $OP = r_1 r_2$ तथा $\angle POI = \theta_1 + \theta_2$

अतः P सम्मिश्र संख्या

$$r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = z_1 z_2$$

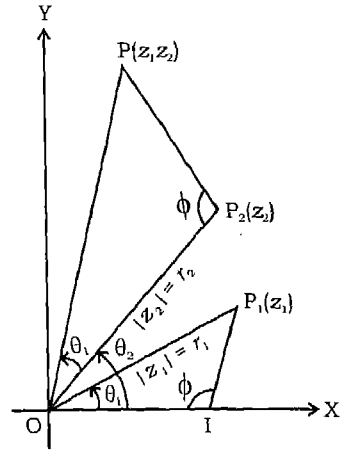
को प्रदर्शित करता है।

आइए, हम दो सम्मिश्र संख्याओं के भागफल पर विचार करें

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)},\ z_2 \neq 0$$

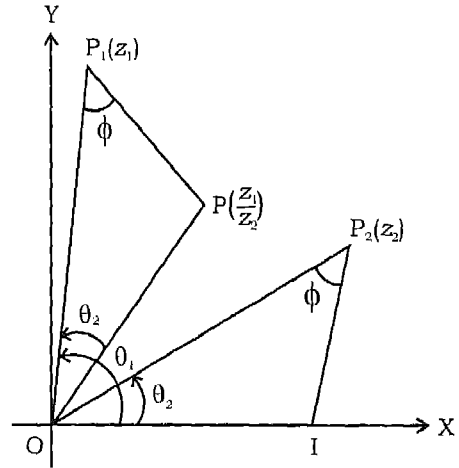
$$= \frac{r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2^2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2)}$$

अतः $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)],\ z_2 \neq 0.$$

$\frac{z_1}{z_2}$ का ज्यामितीय व्याख्या

आकृति 5.12 में, बिन्दु P सम्मिश्र संख्या $\frac{z_1}{z_2}$ को प्रदर्शित करता है। समरूप त्रिभुजों OPP_1 तथा OIP_2 से जिसमें OI = 1, हम पाते हैं

$$\frac{OP}{OI} = \frac{OP_1}{OP_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{r_1}{r_2}$$

तथा रेखाखण्ड OP वास्तविक अक्ष से कोण $(\theta_1 - \theta_2)$ बनाता है।

आकृति 5.12

उदाहरण 19 2 (cos 30° + i sin 30°) को 3(cos 90° + i sin 90°) से गुणा कीजिए।

हल मान लीजिए $z_1 = 2\,(\cos 30° + i \sin 30°)$

और $\quad z_2 = 3\,(\cos 90° + i \sin 90°)$

तब $\quad z_1 z_2 = 2 \times 3\,[\cos(30° + 90°) + i \sin(30° + 90°)]$

$$= 6\,[\cos 120° + i \sin 120°]$$

$$= 6\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

इस प्रकार $z_1 z_2 = -3 + i3\sqrt{3}$ (समकोणीय निर्देशांक में)

उदाहरण 20 12 (cos 150° + i sin 150°) को 3 (cos 60° + i sin 60°) से विभाजित कीजिए।

हल मान लीजिए $z_1 = 12\,(\cos 150° + i \sin 150°)$

तथा $\quad z_2 = 3\,(\cos 60° + i \sin 60°)$

तब $\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{12\,(\cos 150° + i \sin 150°)}{3\,(\cos 60° + i \sin 60°)} \times \frac{\cos 60° - i \sin 60°}{\cos 60° - i \sin 60°}$

$$= 4\,[\cos(150° - 60°) + i \sin(150° - 60°)]$$

$$= 4\,[\cos 90° + i \sin 90°] = 4i \text{ [समकोणीय निर्देशांक में]}$$

प्रश्नावली 5.4

निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं को ध्रुवीय रूप में बदलिए :

1. $1-i$ **2.** $-1+i$ **3.** $-1-i$

4. -3 **5.** $-4+i4\sqrt{3}$ **6.** $\sqrt{3}+i$

7. i

निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं को कार्तीय रूप (Cartesian form) में बदलिए :

8. $2(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$ **9.** $5(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ)$ **10.** $4(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ)$

निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं के मापांक तथा कोणांक ज्ञात कीजिए :

11. $z=-1-i\sqrt{3}$ **12.** $z=-\sqrt{3}+i$ **13.** $z=\dfrac{(1+i)^{13}}{(1-i)^{7}}$

निम्नलिखित गुणनफलों का ध्रुवीय रूप ज्ञात कीजिए :

14. $[2(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)][4(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)]$

15. $[2(\cos 210^\circ + i\sin 210^\circ)][4(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)]$

16. $[3(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)][6(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)]$

निम्नलिखित भागफलों को ध्रुवीय रूप में बदलिए

17. $\dfrac{9(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)}{3(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)}$ **18.** $\dfrac{7(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)}{14(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)}$

5.7 सम्मिश्र संख्याओं के घात तथा मूल

पिछले अनुभाग 5.6 से पुनः स्मरण करते हैं कि

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

आगमन का प्रयोग करते हुए, दिखाया जा सकता है कि उपर्युक्त सूत्र का विस्तार सम्मिश्र संख्याओं की निश्चित संख्याओं के स्वेच्छ गुणनफल तक किया जा सकता है।

अर्थात् यदि $z_1, z_2, \ldots, z_n$, n सम्मिश्र संख्याएँ हों, तब

$$z_1 . z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)] \quad (1)$$

यदि $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$, तब $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n = \theta$ तथा $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = r$,

इसलिए समीकरण (1) से

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta),\ n = 1, 2, 3, \ldots \quad (2)$$

(2) में $r = 1$ तथा $z = \cos\theta + i\sin\theta$ लेने पर, हम पाते हैं

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,\ n = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{3}$$

समीकरण (3), धन पूर्णांक घातांक n के लिए, **डिमाइवर सूत्र (De Moiver's Formula)** कहलाती है। उपर्युक्त सूत्र $n = 0$ के लिए स्वतः सत्य है।

इसके अतिरिक्त, चूँकि $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$

अतः $$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)}$$

$$= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

अतः सूत्र (3) $n = -1$ के लिए सही है। मान लीजिए n एक ऋण पूर्णांक हो, तथा $n = -m$ जहाँ $m > 1$, तब

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^n &= (\cos\theta + i\sin\theta)^{-m} \\ &= [(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1}]^m = [(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^m \\ &= \cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta)\end{aligned}$$

क्योंकि m एक धन पूर्णांक है, अतः (3) $n = -m$ के लिए सत्य है।

दूसरे शब्दों में,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin\theta,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ के लिए} \tag{4}$$

इस प्रकार, n के सभी पूर्णांक मानों – धन, शून्य तथा ऋण के लिए **डिमाइवर का सूत्र** सही है।

टिप्पणी सूत्र (4), जो जन्मदाता डिमाइवर के सम्मान में जाना जाता है, जिसका विस्तार किसी वास्तविक संख्या (परिमेय या अपरिमेय) के लिए भी किया जा सकता है।

सम्मिश्र संख्याओं के मूल ज्ञात करने में भी डिमाइवर का सूत्र प्रयोग होता है। इस प्रकार, हम एक सम्मिश्र संख्या A के धन पूर्णांक घात n के लिए n वाँ मूल ज्ञात कर सकते हैं। मान लीजिए $A = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$

सम्मिश्र संख्या $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ को संख्या A का n वाँ मूल कहा जाता है यदि

$$z^n = A$$

अर्थात् $r^n (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$

या $r^n (\cos n\theta + i\sin n\theta) = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$

चूँकि समान सम्मिश्र संख्याओं के मापांक समान होने चाहिए जब कि उनके कोणांक में $2\pi k$ का अन्तर होता है, k एक स्वेच्छ पूर्णांक है, हम पाते हैं

$r^n = \rho$ तथा $n\theta = \phi + 2\pi k$ जहाँ k एक पूर्णांक है

अर्थात् $r = \sqrt[n]{\rho}$ तथा $\theta = \dfrac{\phi + 2\pi k}{n}$, k एक पूर्णांक है

इस प्रकार, $z = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\dfrac{\phi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\phi + 2\pi k}{n}\right]$

k को $0, 1, 2, \ldots, n-1$ मान देकर, हम n भिन्न–भिन्न मूल पाते हैं। इस प्रकार, समीकरण $z^n = A$ के सभी हलों को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left\{\cos\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right\}, k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1 \qquad (5)$$

यह ध्यान दीजिए कि (5) में अशून्य सम्मिश्र संख्या के n घात के प्रत्येक मूल का मापांक समान ऋणेतर वास्तविक संख्या है लेकिन कोणांकों में परस्पर $\dfrac{2\pi}{n}k$ का अन्तर है जहाँ k कोई पूर्णांक है। ऋणेतर सम्मिश्र संख्या के n वें मूलों की संख्या n होती है।

(5) से यह निष्कर्ष निकलता है कि $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ सम्मिश्र तल के संगत ऐसे बिन्दु हैं जो $\sqrt[n]{\rho}$ त्रिज्या तथा $z = 0$ केन्द्र वाले वृत्त के अंतर्गत n भुजाओं से बने समबहुभुज के शीर्ष हैं।

अब हम इन परिणामों का प्रयोग **सम्मिश्र संख्या के वर्गमूल तथा घनमूल** ज्ञात करने में करेंगे।

मान लीजिए $a = \rho(\cos\phi + i\sin\phi), -\pi < \phi < \pi$

मान लीजिए a के दो वर्गमूल ω_1, ω_2 हैं। सूत्र (5) का प्रयोग करते हुए $\omega_1, \omega_2, k = 0, 1$ के लिए निम्नवत् हैं :

$$\omega_1 = \sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\phi}{2} + i\sin\frac{\phi}{2}\right)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\rho}\left[\cos\left(\frac{\phi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{2} + \pi\right)\right] = -\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\phi}{2} + i\sin\frac{\phi}{2}\right).$$

यदि $a = 1$, तब $\rho = 1$ तथा $\phi = 0$, इस स्थिति में

$\omega_1 = 1$, तथा $\omega_2 = -1$

अर्थात् 1 के दो वर्गमूल 1 तथा -1 हैं।

इकाई के धनमूल ज्ञात करने के लिए, हम पाते हैं

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{(\cos 0° + i \sin 0°)} = \sqrt[3]{1}\left[\cos \frac{0° + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{0° + 2\pi k}{3}\right]$$

इस प्रकार $\omega_k = \cos\frac{2\pi k}{3} + i \sin\frac{2\pi k}{3}$, $k = 0,1,2.$

निष्कर्षतः इकाई के घनमूल निम्नवत् हैं

$$\omega_1 = \cos\frac{0°}{3} + i \sin\frac{0°}{3} = 1$$

$$\omega_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\omega_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

हम ध्यान देते हैं कि प्रथम मूल 1 है। यदि हम द्वितीय मूल को ω से निरूपित करें

अर्थात् $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}$

तो तीसरा मूल ω^2 होगा जो कि वास्तविक गणना से देखा जा सकता है, क्योंकि

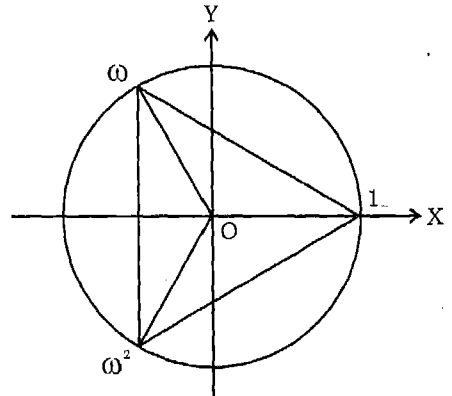
$$\omega^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 2i\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ये सभी मूल इकाई त्रिज्या के वृत्त की परिधि पर होते हैं जैसा कि आकृति 5.13 में दिखाया गया है। यदि हम ω_k के संगत बिन्दुओं को सरल रेखाओं से मिलायें तो वे समबाहु त्रिभुज के शीर्ष बनाते हैं (आकृति 5.13)।

आकृति 5.13

वास्तविक योग करके आसानी से यह भी देखा जा सकता है कि इकाई के तीनों घनमूलों का योग शून्य है अर्थात्

$$1 + \omega + \omega^2 = 0$$

यह परिणाम निम्नलिखित सर्वसमिका से भी प्राप्त किया जा सकता है :

किसी सम्मिश्र संख्या $z \neq 1$ के लिये, हम जानते हैं कि

$$1 + z + z^2 = \frac{1 - z^3}{1 - z} \tag{6}$$

सर्वसमिका (6) में यदि हम $z = \omega$ रखते हैं, तो हम पाते हैं

$$1 + \omega + \omega^2 = \frac{1 - \omega^3}{1 - \omega} = 0 \text{ क्योंकि } \omega^3 = 1.$$

उदाहरण 21 $\sin 30° + i \cos 30°$ को ध्रुवीय रूप में व्यक्त कीजिए।

हल $\sin 30° = \cos 60°$ तथा $\cos 30° = \sin 60°$

इस प्रकार $\sin 30° + i \cos 30° = \cos 60° + i \sin 60°$

$= 1.(\cos 60° + i \sin 60°)$

अतः $r = 1$ तथा $\theta = \frac{\pi}{3}$

इसलिए ध्रुवीय रूप, $1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$ है।

उदाहरण 22 $4 + i\,4\sqrt{3}$ का वर्गमूल ज्ञात कीजिए ।

हल आइए, हम संख्या $4 + i\,4\sqrt{3}$ को त्रिकोणमितीय रूप में लिखें।

$$4 + i\,4\sqrt{3} = 8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

हम जानते हैं कि $\omega_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\frac{\phi + 2\pi k}{n} + i \sin\frac{\phi + 2\pi k}{n}\right]$, जहाँ $\rho = 8, n = 2$

इस प्रकार $\omega_k = \sqrt{8}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi k\right)\right], k = 0, 1$

मान लीजिए $4 + i\,4\sqrt{3}$ के दो मूल ω_1, ω_2 हैं।

इसलिए हम पाते हैं $\omega_1 = \sqrt{8}\left[\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right]$

$= \sqrt{6} + i\sqrt{2}$

$\omega_2 = \sqrt{8}\left[\cos\frac{7\pi}{6} + i \sin\frac{7\pi}{6}\right]$

$= -\sqrt{6} - i\sqrt{2}$

उदाहरण 23 $-7-24\,i$ का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $x + iy = \sqrt{-7-24i}$

तब $(x+iy)^2 = -7-24i$

या $x^2 - y^2 + 2xyi = -7-24i$

वास्तविक तथा काल्पनिक संख्याओं की समता से, हम पाते हैं

$$x^2 - y^2 = -7 \qquad (1)$$

$$2xy = -24$$

$$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + (2xy)^2$$

$$= 49 + 576 = 625$$

इस प्रकार $x^2+y^2 = 25$ (2)

(1) तथा (2) से $x^2 = 9$ और $y^2 = 16$

या $x = \pm 3,\ y = \pm 4$

चूँकि गुणनफल xy ऋणात्मक है, हम पाते हैं

$$x = 3,\ y = -4 \text{ या } x = -3,\ y = 4$$

इस प्रकार, $-7-24i$ के वर्गमूल $3-4i$ तथा $-3+4i$ हैं।

उदाहरण 24 8 के घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल आइए हम संख्या $a = 8$ को त्रिकोणमितीय रूप में लिखें।

$$8 = 8\,(\cos 0^0 + i \sin 0^0)$$

इस प्रकार $\omega_k = \sqrt[3]{8}\left[\cos\frac{0+2\pi k}{3} + i\sin\frac{0+2\pi k}{3}\right]$ $k = 0, 1, 2.$

मान लीजिए 8 के तीन मूल ω_1, ω_2 और ω_3 हैं, तब

$$\omega_1 = 2\left(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ\right) = 2$$

$$\omega_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$\omega_3 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -1 - i\sqrt{3}$$

उदाहरण 25 यदि $1, \omega, \omega^2$ इकाई के तीन घनमूल हैं, तो दिखाइए

$$(1+\omega)^3 - (1+\omega^2)^3 = 0$$

हल हम संबंध $1+\omega+\omega^2=0$ तथा $\omega^3=1$ का प्रयोग करके, प्राप्त करते हैं

$$\begin{aligned}(1+\omega)^3-(1+\omega^2)^3 &= (-\omega^2)^3-(-\omega)^3\\ &= -(\omega^3)^2+\omega^3\\ &= -1+1=0= \text{दायाँ पक्ष}\end{aligned}$$

प्रश्नावली 5.5

निम्नलिखित के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

1. $-15-8i$ **2.** $-8-6i$ **3.** $1-i$

4. $-i$ **5.** i **6.** $1+i$

निम्नलिखित के घनमूल ज्ञात कीजिए :

7. -8 **8.** $3+i\sqrt{3}$ **9.** $-1+i$

10. $-1-i$

11. यदि $z=x+iy$,सिद्ध कीजिए कि

$|x|+|y|\leqslant\sqrt{2}\ |z|$

12. सिद्ध कीजिए

$\text{Re}\,(z_1, z_2)=\text{Re}\,z_1\,.\,\text{Re}\,z_2-\text{Im}\,z_1\,.\,\text{Im}\,z_2$

13. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए

(*i*) ω^{18} (*ii*) ω^{21} (*iii*) ω^{-30} (*iv*) ω^{-105}

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए :

14. $(2-\omega)(2-\omega^2)(2-\omega^{10})(2-\omega^{11})=49$

15. $\dfrac{a+b\,\omega+c\,\omega^2}{a\,\omega+b\,\omega^2+c}=\omega^2$

16. $(1-\omega^2+\omega^4)(1+\omega^2-\omega^4)=4$

17. $(1-\omega+\omega^2)+(1+\omega-\omega^2)^2=-4$

18. $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)=9$

19. $1+\omega^n+\omega^{2n}=0$ जबकि $n=2, 4$

20. $1+\omega^n+\omega^{2n}=3$ जब कि n, 3 का गुणज है।

विविध उदाहरण

उदाहरण 26 यदि $x=a+b,\ y=a\omega+b\omega^2,\ z=a\omega^2+b\omega$,

सिद्ध कीजिए कि $x^3+y^3+z^3=3(a^3+b^3)$

हल हम पाते हैं

$$\begin{aligned} x+y+z &= (a+b)+(a\omega+b\omega^2)+(a\omega^2+b\omega) \\ &= a(1+\omega+\omega^2)+b(1+\omega^2+\omega) \\ &= a.0+b.0=0 \ [\text{क्योंकि } 1+\omega+\omega^2=0] \end{aligned} \quad (1)$$

सर्वसमिका $(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3-3xyz$

में समीकरण (1) का प्रयोग करने पर, हम पाते हैं

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= 3xyz \\ &= 3(a+b)(a\omega+b\omega^2)(a\omega^2+b\omega) \\ &= 3[a^3+b^3+a^2b(1+\omega+\omega^2)+ab^2(1+\omega+\omega^2)] \\ &= 3(a^3+b^3) \end{aligned}$$

उदाहरण 27 सिद्ध कीजिए कि $(\cos 60° + i \sin 60°)^3 = -1$

हल डिमाइवर के सूत्र

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

के प्रयोग से हम पाते हैं

$$\begin{aligned} (\cos 60° + i\sin 60°)^3 &= \cos 3\times 60° + i\sin 3\times 60° \\ &= \cos 180° + i\sin 180° \\ &= -1 + i\,.\,0 = -1 \end{aligned}$$

अध्याय 5 पर विविध प्रश्नावली

1. सम्मिश्र तल में कौन से बिन्दुओं का समुच्चय प्रतिबन्ध $|z-i|=1$ से परिभाषित है?

2. सम्मिश्र संख्या $z = \dfrac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}$ को ध्रुवीय रूप में लिखिये।

3. संख्या $z = \left(i-\sqrt{3}\right)^{13}$ को बीजीय रूप (algebraic form) में लिखिए।

4. यदि $x - iy = \sqrt{\dfrac{a-ib}{c-id}}$, तो सिद्ध कीजिए कि $\left(x^2+y^2\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

5. दिया है कि $z_1+z_2+z_3 = A$, $z_1+z_2\omega+z_3\omega^2 = B$, $z_1+z_2\omega^2+z_3\omega = C$, तो z_1, z_2, z_3 के मान A, B, C, ω के पदों में ज्ञात कीजिए।

6. यदि 1 ω, ω^2 इकाई के घनमूल हों, तो दिखाइए कि
$(1-\omega+\omega^2)^5 + (1+\omega-\omega^2)^5 = 32$

7. यदि 1 ω, ω^2 इकाई के घनमूल हों तो सिद्ध कीजिए कि
$(3+3\omega+5\omega^2)^6-(2+6\omega+2\omega^2)^3=0$

8. यदि $|z|=1$, सिद्ध कीजिए कि $\frac{z-1}{z+1}$ $(z \neq -1)$ एक पूर्णतः काल्पनिक संख्या हैं। आप क्या निष्कर्ष निकालेगें यदि $z=1$ हो?

9. सिद्ध कीजिए कि $(\cos 45° + i \sin 45°)^2 = i$

10. निम्नलिखित में हेत्वाभास (fallacy) की व्याख्या कीजिए।

$$-1 = i.i = \sqrt{-1}.\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

यूनानियों ने इस तथ्य को पहचाना था कि एक ऋण संख्या के वर्गमूल का वास्तविक संख्या पद्धति में कोई अस्तित्व नहीं है। परन्तु इसका श्रेय भारतीय गणितज्ञ **महावीर** (850 ई०) को जाता है जिन्होंने सर्वप्रथम इस कठिनाई का स्पष्टतः उल्लेख किया। "उन्होनें अपनी कृति '**गणित सार संग्रह**' में बताया कि जैसे वस्तुओं का स्वभाव है कि ऋण (राशि) एक पूर्णवर्ग (राशि) नहीं है, अतः इसका वर्गमूल नहीं होता है।" एक दूसरे भारतीय गणितज्ञ **भास्कर** ने 1150 ई० में अपनी कृति "**बीजगणित**" में भी लिखा है, "ऋण राशि का कोई वर्गमूल नहीं होता है क्योंकि यह एक वर्ग नहीं है।" **कार्डन** (Cardan) (1545 ई०) ने $x+y=10, xy=40$ को हल करने में उत्पन्न समस्या पर ध्यान दिया । उन्होंने $x=5+\sqrt{-15}$ तथा $y=5-\sqrt{-15}$ इसके हल के रूप में ज्ञात किया जिसे उन्होनें स्वयं अमान्य कर दिया कि ये संख्याएँ व्यर्थ (useless) हैं। **ऐल्बर्ट गिरार्ड** (Albert Girard) (लगभग 1625 ई०) ने ऋण संख्याओं के वर्गमूल को स्वीकार किया और कहा कि, इससे हम बहुपदीय समीकरण की जितनी घात होगी, उतने मूल प्राप्त कराने में सक्षम होंगे। **आयलर** (Euler) ने सर्वप्रथम $\sqrt{-1}$ को i संकेतन प्रदान किया तथा **डब्ल्यू० आर० हैमिल्टन** (W.R. Hamilton) (लगभग 1830 ई०) ने एक शुद्ध गणितीय परिभाषा देकर और तथाकथित "काल्पनिक संख्या" के प्रयोग को छोड़ते हुए सम्मिश्र संख्या $a+ib$ को वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्म (a, b) के रूप में प्रस्तुत किया।

रैखिक असमीकरण (LINEAR INEQUATIONS)

अध्याय 6

6.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में हम एक चर और दो चर राशियों के समीकरणों तथा शाब्दिक प्रश्नों को समीकरणों में परिवर्तित करके हल करना सीख चुके हैं। अब हमारे मस्तिष्क में स्वभावतः यह प्रश्न उठता है ''क्या शाब्दिक प्रश्नों को सदैव एक समीकरण के रूप में परिवर्तित करना सम्भव है?'' सदैव नहीं। उनके स्थान पर हमें ऐसे कथन मिल सकते हैं, जिनमें असमता (Inequality) के चिह्न प्रयुक्त हों। ऐसे कथन ***असमीकरण*** (Inequations) कहलाते हैं। इस अध्याय में, हम एक या दो चर राशि के रैखिक असमीकरणों का अध्ययन करेंगे।

असमीकरणों का अध्ययन विज्ञान, गणित, सांख्यिकी, इष्टतमकारी समस्याओं (optimization problems), अर्थशास्त्र, मनोविज्ञान इत्यादि से सम्बन्धित समस्याओं के हल करने में अत्यन्त उपयोगी है।

6.2 असमीकरण (Inequations)

हम निम्नांकित स्थितियों पर विचार करते हैं।

(i) रवि 200 रूपये लेकर चावल खरीदने के लिए सुपर बाजार जाता है, जहां चावल 1 किग्रा के पैकेटों में ही उपलब्ध हैं, और एक पैकेट का मूल्य 13 रूपये है। यदि x उसके द्वारा खरीदे गये चावल के पैकेटों की संख्या को व्यक्त करता हो, तो उसके द्वारा खर्च की गयी धनराशि $13x$ रू० होगी। क्योंकि उसे चावल को पैकेटों में ही खरीदना है इसलिए वह 200 रूपये की पूरी धनराशि को खर्च नहीं कर पाएगा (क्यों?)। अतः

$$13x < 200 \qquad (1)$$

स्पष्टतः कथन (1) समीकरण नहीं हैं, क्योंकि इसमें समता का चिह्न (=) नहीं है बल्कि इसमें असमता का चिह्न '<' प्रयुक्त है।

(ii) फातिमा के पास 100 रूपये हैं जिससे वह कुछ कलमें और पेन्सिलें खरीदना चाहती है। कलम का मूल्य 8 रूपये और पेन्सिल का मूल्य 3 रूपये है। यदि फातिमा द्वारा खरीदी गयी कलमों की संख्या x तथा पेन्सिलों की संख्या y हो, तो उसके द्वारा खर्च की गयी कुल धनराशि $(8x + 3y)$ रूपये है। इस प्रकार हम पाते हैं कि

$$8x + 3y \leq 100 \quad (2)$$

क्योंकि इस स्थिति में खर्च की गयी कुल धनराशि अधिकतम 100 रूपये हैं। ध्यान दीजिए कथन (2) के दो भाग है:

$$8x + 3y < 100 \quad (3)$$

$$8x + 3y = 100 \quad (4)$$

कथन (3) समीकरण नही है, जबकि कथन (4) समीकरण है।

(1), (2) तथा (3) जैसे उपर्युक्त कथन *असमीकरण* कहलाते हैं। असमीकरण के कुछ अन्य उदाहरण निम्नांकित हैं:

$$ax + b < 0 \quad (5)$$

$$ax + b \leq 0 \ (a \neq 0) \quad (6)$$

$$ax + b > 0 \quad (7)$$

$$ax + b \geq 0 \ (a \neq 0) \quad (8)$$

$$ax + by < c \ (a \neq 0, b \neq 0) \quad (9)$$

$$ax + by \leq c \ (a \neq 0, b \neq 0) \quad (10)$$

$$ax + by \geq c \ (a \neq 0, b \neq 0) \quad (11)$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \ (a \neq 0) \quad (12)$$

$$ax^2 + bx + c > 0 \ (a \neq 0) \quad (13)$$

सामान्यतः ऐसे कथन जिनमें केवल चर राशि (यों) तथा असमता के चिह्न $>, <, \geq$ या $\leq$ का प्रयोग हो, को असमीकरण कहते हैं।

क्रमांक (5) से (8) तक के असमीकरण एक चर राशि x के रैखिक असमीकरण (linear inequations) हैं, (9), (10) और (11) के असमीकरण दो चर राशियों x तथा y के रैखिक असमीकरण हैं। क्रमांक (12) और (13) के असमीकरण एक चर राशि x के द्विघातीय असमीकरण हैं।

इस अध्याय में हम केवल एक चर और दो चर राशियों के रैखिक असमीकरण का अध्ययन करेंगे।

6.3 एक चर राशि के रैखिक असमीकरणों के हल

अनुभाग 6.2 के असमीकरण (1) अर्थात्

$$13\,x < 200$$

पर विचार कीजिए। ध्यान दें, कि यहां x चावल के पैकेटों की संख्या को व्यक्त करता है। स्पष्टतः x एक ऋणात्मक पूर्णांक अथवा भिन्न नहीं हो सकता है। इस असमीकरण का बायां पक्ष $13x$ और दायां पक्ष 200 है।

$x = 0$ के संगत बायां पक्ष $= 13x = 13(0) = 0 < 200$ (दायां पक्ष), जो सत्य है।

$x = 1$ के संगत बायां पक्ष $= 13x = 13(1) = 13 < 200$, जो सत्य है।

$x = 2$ के संगत बायां पक्ष $= 13x = 13(2) = 26 < 200$, जो सत्य है।

: : : : : : :

$x = 14$ के संगत बायां पक्ष $=13x = 13\ (14) = 182 < 200$, जो सत्य है

$x = 15$ के संगत बायां पक्ष $= 13x = 13\ (15) = 195 < 200$, जो सत्य है।

$x = 16$ के संगत बायां पक्ष $= 13x = 13\ (16) = 208 < 200$ जो ***सत्य नहीं है।***

इसी प्रकार सभी $x > 16$ के लिए हम दिखा सकते हैं कि कथन $13x < 200$ सत्य नहीं है। उपर्युक्त स्थिति में हम पाते हैं कि उपर्युक्त असमीकरण को संतुष्ट करने वाले x के मान केवल $0,1,2,3,\ldots, 15$ हैं। x के उन मानों को जो दिए असमीकरण को एक सत्य कथन बनाते हों, उन्हें असमीकरण के ***हल*** कहते हैं।

इस प्रकार, एक चर राशि के किसी असमीकरण का हल, चर राशि का वह मान है, जो इसे एक सत्य कथन बनाता हो।

हमने उपर्युक्त असमीकरण का हल "प्रयास और भूल विधि (trial and error method)" से प्राप्त किया है। स्पष्टतः यह विधि अधिक समय लेने वाली तथा कभी कभी सम्भव नहीं होती है, अतः त्याज्य है। हमें असमीकरणों के हल के लिए कुछ अधिक अच्छी या क्रमबद्ध तकनीक की आवश्यकता है, जैसा कि हमने समीकरणों को हल करने के लिए पिछली कक्षाओं में सीखा है।

स्मरण कीजिए कि समीकरणों को हल करते समय हम निम्नांकित नियमों का पालन करते हैं।

नियम 1 किसी समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्याएं जोड़ी (अथवा घटाई) जा सकती हैं।

नियम 2 एक समीकरण के दोनों पक्षों को समान अशून्य संख्याओं से गुणा (अथवा भाग) किया जा सकता है।

असमीकरण के हल करने में हम इन्हीं नियमों का पालन, तथा नियम 2 में कुछ संशोधन के साथ करते हैं। अन्तर मात्र इतना है कि ऋणात्मक संख्याओं से असमीकरण के दोनों पक्षों को गुणा करने पर असमता के चिह्न विपरीत हो जाते हैं (अर्थात '<' को '>' और ≤' को '≥' इत्यादि कर दिया जाता है)। इसका कारण निम्न तथ्यों से स्पष्ट है।

$3 > 2$ जबकि $-3 < -2$, और

$-8 < -7$ जबकि $(-8)(-2) > (-7)(-2)$, अर्थात् $16 > 14$

इस प्रकार असमीकरणों को हल करने के लिए हम निम्नांकित नियमों को उल्लेख करते हैं।

नियम 1' किसी असमीकरण के दोनों पक्षों में असमता के चिन्ह को प्रभावित किए बिना समान संख्याएँ जोड़ी (अथवा घटाई) जा सकती हैं।

नियम 2' असमीकरण के दोनो पक्षों को समान धनात्मक संख्याओं से गुणा (अथवा भाग) किया जा सकता है। परन्तु दोनों पक्षों को समान ऋणात्मक संख्याओं से गुणा (अथवा भाग) करते समय असमता के चिह्न तदनुसार परिवर्तित कर दिए जाते हैं।

अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करते हैं।

उदाहरण 1 हल कीजिए $13x < 200$, जब

(i) x एक प्राकृत संख्या है।

(ii) x एक पूर्णांक है।

हल ज्ञात है कि

$$13x < 200$$

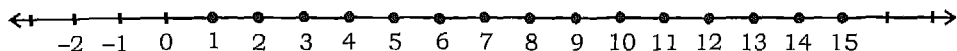
अथवा $$\frac{13}{13}x < \frac{200}{13}$$ (नियम 2')

अथवा $$x < \frac{200}{13}$$

(i) जब x एक प्राकृत संख्या है

स्पष्टतः इस स्थिति में असमीकरण के हल

$1, 2, 3, \ldots, 15$

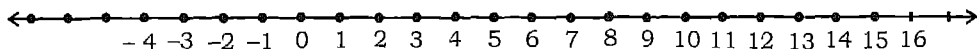
हैं। इन हलों को संख्या रेखा पर पन्द्रह बिन्दुओं द्वारा निरूपित कर सकते हैं जैसा कि (आकृति 6.1) में दिखाया गया है।

आकृति 6.1

(ii) जब x एक पूर्णांक है

स्पष्टतः इस स्थिति में दिए असमीकरण के हल

$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, 15$ हैं।

इन्हें संख्या रेखा पर अपरिमित बिन्दुओं द्वारा निरूपित किया जा सकता है जैसा कि (आकृति 6.2) में दिखाया गया है।

–4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

आकृति 6.2

उदाहरण 2 हल कीजिए : $3x + 5 < x - 7$, जब

(i) x एक पूर्णांक है।

(ii) x एक वास्तविक संख्या है।

हल ज्ञात है, कि

$3x + 5 < x - 7$

अथवा $3x + 5 - 5 < x - 7 - 5$ (नियम 1′)

अथवा $3x < x - 12$

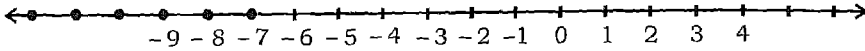
अथवा $3x - x < x - 12 - x$ (नियम 1′)

अथवा $2x < -12$

अथवा $x < -6$ (नियम 2′)

(i) जब x एक पूर्णांक है

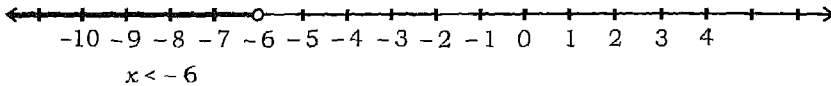
इस स्थिति में दिये असमीकरण के हल $\ldots, -9, -8, -7$ हैं।

इन हलों को संख्या रेखा पर अपरिमित बिन्दुओं द्वारा निरूपित कर सकते हैं जैसा कि आकृति 6.3 में दिखाया गया है।

आकृति 6.3

(ii) जब x एक वास्तविक संख्या है

इस स्थिति मे असमीकरण के हल $x < -6$ से व्यक्त हैं। इसका अर्थ है कि -6 से छोटी समस्त वास्तविक संख्याएं असमीकरण के हल है। संख्या–रेखा पर इन हलों को निम्नांकित प्रकार से दर्शाया जा सकता है (आकृति 6.4)।

–10 –9 –8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4

$x < -6$

आकृति 6.4

यह दर्शाने के लिए कि (-6) हल में सम्मिलित नहीं हैं, (-6) पर एक वृत्त से घेरा लगा देते हैं।

हमने असमीकरण के हल प्राकृत संख्याओं, पूर्णांकों तथा वास्तविक संख्याओं के समुच्चयों पर विचार करके ज्ञात किए है। आगे जब तक अन्यथा वर्णित न हो हम असमीकरणों का हल वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में ही ज्ञात करेंगें।

उदाहरण 3 हल कीजिए $4x + 3 < 6x + 7$

हल ज्ञात है कि $4x + 3 < 6x + 7$

या $4x + 3 - 3 < 6x + 7 - 3$

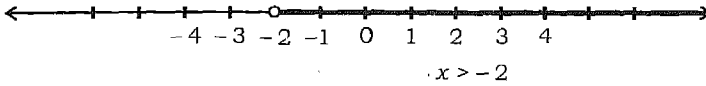
या $4x < 6x + 4$

या $4x - 6x < 6x + 4 - 6x$

या $-2x < 4$

या $\frac{-2x}{-2} > \frac{4}{-2}$ (नियम 2′)

या $x > -2$,

अर्थात -2 से बड़ी समस्त वास्तविक संख्याएं, दिए गये असमीकरण के हल हैं। संख्या रेखा पर इन हलों को निम्नांकित रूप में आलेखित कर सकते हैं (आकृति 6.5)।

आकृति 6.5

टिप्पणी उपर्युक्त उदाहरणों से हम देखते हैं कि एक चर राशि के रैखिक असमीकरणों को हल करते समय चर राशि वाले पदों को असमीकरण के एक पक्ष में तथा अचर पदों को दूसरे पक्ष में ले जाते हैं जैसा कि एक चर राशीय समीकरणों को हल करते समय किया जाता है।

उदाहरण 4 हल कीजिए : $\frac{2x-3}{4}+8 \geq 2+\frac{4x}{3}$

हल

$$\frac{2x-3}{4}+8 \geq 2+\frac{4x}{3}$$

अथवा $12\left(\frac{2x-3}{4}+8\right) \geq 12\left(2+\frac{4x}{3}\right)$ (4 और 3 के ल०स० 12 से दोनों पक्षों को गुणा करने पर)

या $\quad 3(2x-3)+96 \geq 24+16x$

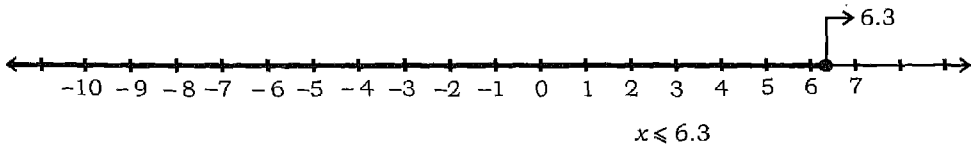
या $\quad 6x-9+96 \geq 24+16x$

या $\quad 6x+87 \geq 24+16x$

या $\quad -10x \geq -63$

या $\quad \frac{-10x}{-10} \leq \frac{-63}{-10}$ (नियम 2′)

या $\quad x \leq 6.3,$

अर्थात् ऐसी समस्त वास्तविक संख्याएं जो 6.3 के बराबर अथवा छोटी हैं इस असमीकरण के हल हैं। संख्या रेखा पर इन्हें हम निम्नांकित प्रकार से प्रदर्शित कर सकते हैं (आकृति 6.6.)।

आकृति 6.6

ध्यान दीजिए कि बिन्दु 6.3 के ऊपर मोटा काला बिन्दु सूचित करता है कि अन्तिम बिन्दु अर्थात् 6.3 हलों में सम्मिलित है।

प्रश्नावली 6.1

निम्नांकित असमीकरणों को हल कीजिए:–

1. $3x - 7 > x + 3$.
2. $x + 10 > 4x - 5$.
3. $x + 12 < 4x - 2$.
4. $4x - 7 < 3 - x$.
5. $5x - 1 > 3x + 7$.
6. $8x - 2 > 5x$.
7. $3x + 17 \leq 2(1 - x)$.
8. $3x - 10 > 5x + 1$.
9. $-2x + 6 \leq 5x - 4$.
10. $3(x - 2) \leq 5x + 8$.
11. $-(x - 3) + 4 > -2x + 5$.
12. $2(2x + 3) - 10 < 6(x - 2)$.
13. $2 - 3x \geq 2(x + 6)$.
14. $37 - (3x + 5) \geq 9x - 8(x - 3)$.
15. $\frac{5x}{2} + \frac{3x}{4} \geq \frac{39}{4}$.
16. $\frac{4+2x}{3} \geq \frac{x}{2} - 3$.
17. $\frac{3(x-2)}{5} \geq \frac{5(2-x)}{3}$.
18. $\frac{x}{4} < \frac{5x-2}{3} - \frac{7x-3}{5}$.
19. $\frac{5-2x}{3} \leq \frac{x}{6} - 5$.
20. $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}x + 4\right) \geq \frac{1}{3}(x - 6)$.

6.4 एक चर राशि के रैखिक असमीकरण निकाय का हल

पिछले अनुभाग में हम एक चर राशि के रैखिक असमीकरण को हल कर चुके हैं। इस अनुभाग में हम एक चर राशि के रैखिक असमीकरण–निकाय को हल करेंगें। असमीकरण निकाय को हल करने के लिए हम उसके प्रत्येक असमीकरण को संतुष्ट करने वाले चर राशि के मानों को ज्ञात करते हैं। इसके पश्चात हम चर राशि के उन मानों को ज्ञात करते हैं, जो सबमें सर्वनिष्ठ (common) हों। चर–राशि के ये सर्वनिष्ठ मान ही दिए गए असमीकरण–निकाय के हल हैं। हम अब कुछ उदाहरणों पर विचार करते हैं।

उदाहरण 5 असमीकरण–निकाय को हल कीजिए

$$x + 3 > 0, \quad (1)$$

$$2x < 14 \quad (2)$$

हल असमीकरण (1) के हल

$$x > -3 \quad (3)$$

द्वारा व्यक्त हैं।

पुनः असमीकरण (2) के हल

$$x < 7. \quad (4)$$

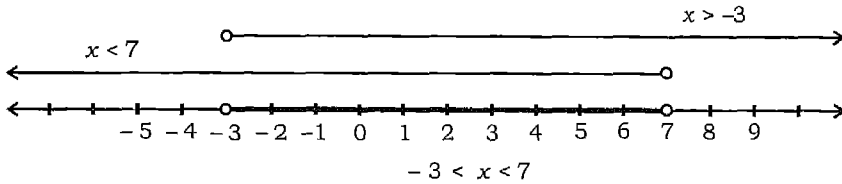
द्वारा व्यक्त हैं।

स्पष्टतः (3) और (4) को संतुष्ट करने वाले x के उभयनिष्ठ मान –3 और 7 के मध्यस्थ है। इन्हें $-3 < x < 7$ द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।

अतः दिए गए निकाय का हल $-3 < x < 7$ द्वारा व्यक्त है।

टिप्पणी

1. $-3 < x < 7$ को दिए असमीकरण का हल – अन्तराल (solution interval) कहते हैं।

2. यदि हम (3) और (4) का आलेख रेखा संख्या पर खींचें तो हम देख सकते हैं, कि x के वे मान जो (3) तथा (4) में उभयनिष्ठ हैं, – 3 और 7 के मध्यस्थ हैं (आकृति 6.7)।

आकृति 6. 7

उदाहरण 6 निम्नांकित असमीकरण –निकाय को हल कीजिए :

$$2x - 7 > 5 - x \quad (1)$$

$$11 - 5x \leq 1 \quad (2)$$

हल असमीकरण (1) से हम प्राप्त करते हैं

$$3x > 12$$

अथवा $$x > 4 \quad (3)$$

समीकरण (2) से हम प्राप्त करते हैं

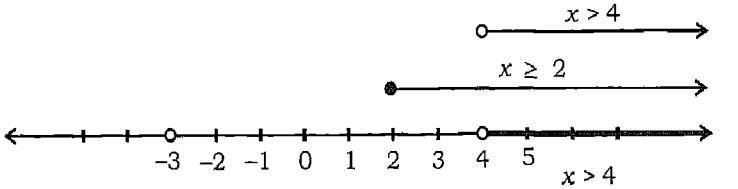
$$-5x \leq -10$$

अथवा $$x \geq 2 \quad (4)$$

(3) तथा (4) के अवलोकन से स्पष्ट है कि x के वे मान जो असमीकरणों (1) और (2) को साथ

– साथ संतुष्ट करते हैं, $x > 4$ द्वारा हम व्यक्त करते हैं।

अतः दिए गए निकाय का हल $x > 4$ है।

टिप्पणी यदि संख्या–रेखा पर (3) तथा (4) को आलेखित करें तो हम पाते हैं कि x के उभयनिष्ठ मान $x > 4$ द्वारा व्यक्त हैं (आकृति 6.8)।

आकृति 6.8

उदाहरण 7 निम्नांकित निकाय को हल कीजिए

$$2x + 5 \leq 0 \quad (1)$$

$$x - 3 \leq 0 \quad (2)$$

हल : असमीकरण (1) के हल

$$x \leq -\frac{5}{2} \quad (3)$$

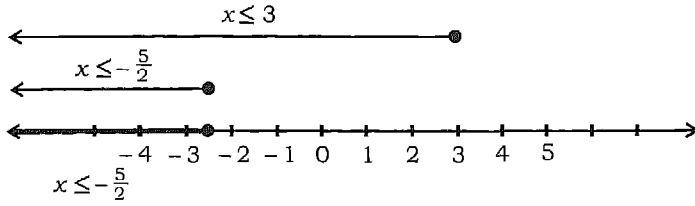
तथा असमीकरण (2) के हल

$$x \leq 3 \quad (4)$$

द्वारा व्यक्त हैं।

(3) तथा (4) के अवलोकन से दिए गए निकाय का हल

$$x \leq -\frac{5}{2}$$

टिप्पणी यदि उपर्युक्त (3) तथा (4) को संख्या–रेखा पर आलेखित करें तो हम देखते हैं कि x के वे मान जो उभयनिष्ठ हैं, $x \leq -\frac{5}{2}$ द्वारा व्यक्त होते हैं (आकृति 6.9)।

आकृति 6.9

उदाहरण 8 निम्नांकित असमीकरण निकाय को हल कीजिए।

$$4x + 3 \geq 2x + 17 \quad (1)$$

$$3x - 5 < -2 \quad (2)$$

हल : ज्ञात है $4x + 3 \geq 2x + 17$

अथवा $2x \geq 14$

अथवा $x \geq 7$

इस प्रकार असमीकरण (1) के हल

$$x \geq 7 \quad (3)$$

द्वारा व्यक्त हैं।

इसी प्रकार असमीकरण (2) के हल

$$x < 1 \quad (4)$$

द्वारा व्यक्त हैं। (3) तथा (4) के अवलोकन से हम पाते हैं, कि x का ऐसा कोई मान नहीं है जो 1 से छोटा हो तथा साथ ही 7 के बराबर या 7 से बड़ा हो। इस प्रकार दिए हुए असमीकरण निकाय का कोई हल नहीं है।

टिप्पणी यदि हम (3) तथा (4) को संख्या रेखा पर आलेखित करें तो देखते हैं कि (3) तथा (4) में x का कोई मान उभयनिष्ठ नहीं है (आकृति 6.10)।

आकृति 6.10

प्रश्नावली 6.2

प्रत्येक असमीकरण–निकाय को हल कीजिए।

1. $x-2>0, \quad 3x<18$

2. $x+2>11,\ 2x\leq 20$

3. $2x-3<7, \quad 2x>-4$

4. $5x+1>-24, \quad 5x-1<24$

5. $x+2\leq 5, \quad 3x-4>-2+x$

6. $4x+5>3x, \quad -(x+3)+4\leq -2x+5$

7. $\frac{4x}{3}-\frac{9}{4}<x+\frac{3}{4}, \quad \frac{7x-1}{3}-\frac{7x+2}{6}>x$

8. $2(x+1)<x+5, \quad 3(x+2)>2-x$

9. $3x-1\geq 5,\ x+2>-1$

10. $3x-7>2(x-6),\ 6-x>11-2x$

11. $-2-\frac{x}{4}\leq \frac{1+x}{3},\ 3-x<4(x-3)$

12. $\frac{5x}{4}+\frac{3x}{8}>\frac{39}{8}, \frac{2x-1}{12}-\frac{x-11}{3}<\frac{3x+1}{4}$

13. $5(2x-7)-3(2x+3)\leq 0,\ 2x+19\leq 6x+47$

14. $2x-7<11,\ 3x+4<-5$

15. $4-5x>-11,\ 4x+11\leq -13$

16. $7x-8<4x+7,\ \frac{-x}{2}>4$

17. $4x-5<11,\ -3x-4\geq 8$

18. $5x-7<3(x+3),\ 1-\frac{3x}{2}\geq x-4$

19. $-4x+1\geq 0,\ 3-4x<0$

20. $2(2x+3)-10<6(x-2),\ \frac{2x-3}{4}+6\geq 2+\frac{4x}{3}$

6.5 दो चर राशियों के रैखिक असमीकरणों का आलेखीय हल

अनुभाग 6.2 में हमें दो चर राशियों x तथा y का निम्नांकित रैखिक असमीकरण

$$8x + 3y \le 100 \qquad (1)$$

जो फातिमा द्वारा कलमों और पेन्सिलों के खरीदने सम्बन्धी शाब्दिक प्रश्न को गणितीय रूप में परिवर्तित करने से प्राप्त हुआ था।

चूँकि वस्तुओं की संख्या एक ऋणात्मक और भिन्नात्मक संख्या नहीं हो सकती है, अतः हम इस असमीकरण का हल x तथा y को केवल पूर्ण संख्या के रूप में ध्यान रखते हुए करते हैं। इस अवस्था में हम x तथा y के मानों के ऐसे जोड़े ज्ञात करते हैं जिनके संगत कथन (1) सत्य हैं। वास्तव में ऐसे युग्मों का समुच्चय असमीकरण (1) का हल समुच्चय (solution set) होगा।

$x = 0$ लेकर प्रारम्भ करने पर हम पाते हैं, कि (1) का बायां पक्ष $= 8x + 3y = 8(0) + 3y = 3y$, इस प्रकार

$$3y \le 100 \text{ अथवा } y \le \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3} \qquad (2)$$

अतः $x = 0$ के संगत y के मान 0,1,2, ..., 33 मात्र हो सकते हैं। इस स्थिति में (1) केवल (0,0), (0, 1), (0, 2),...,(0,33) हैं। इसी प्रकार (1) के अन्य हल जब x = 1,2,...,12 क्रमशः हैं, निम्नांकित हैं :

(1, 0), (1,1), (1, 2),... ,(1, 30)
(2, 0), (2, 1), (2 , 2), ...,(2, 28)
– – – –
– – – –
(8, 0), (8, 1), (8, 2), ..., (8, 12)
(9, 0), (9, 1), (9, 2), ..., (9, 9)
(10, 0), (10, 1), (10, 2), ..., (10, 6)
(11, 0), (11, 1), (11, 2), ..., (11,4)
(12, 0), (12, 1)

उपर्युक्त सभी क्रमित–युग्म असमीकरण (1) के हल हैं। हम जानते हैं कि x तथा y के मान क्रमशः 12 तथा 33 से अधिक नहीं हो सकते हैं (क्यों?)। हम यह भी जानते हैं कि उपर्युक्त क्रमित–युग्मों में से कुछ युग्म जैसे (5, 20), (8, 12) तथा (11, 4), समीकरण $8x + 3y = 100$ को भी संतुष्ट करते हैं जो दिये हुए असमीकरण का एक भाग है।

अब हम x तथा y के प्रांत (domain) को पूर्ण संख्याओं से विस्तारित करके वास्तविक संख्याएं करते हैं, और देखते हैं कि इस अवस्था में असमीकरण (1) के क्या हल होते हैं। आप देखगें

कि हल करने की आलेखित–विधि (Graphical method) इस स्थिति में अधिक सुविधाजनक है। इस उद्देश्य से, हम संगत समीकरण

$$8x + 3y = 100 \quad (3)$$

पर विचार करते हैं। और इसका आलेख खींचते हैं। पिछली कक्षाओं में सीखी हुई विधि द्वारा हम आलेख खींचते हैं, जो एक रेखा है। यह रेखा निर्देशांक तल (co–ordinate Plane) को दो अर्द्ध–तलों में विभक्त करती है (आकृति 6.11)।

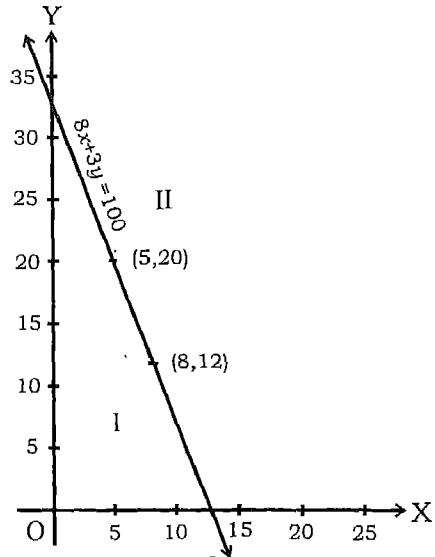
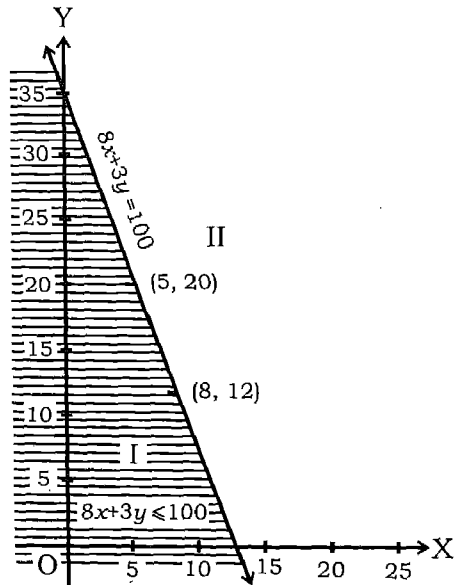
आकृति 6.11

(i) अर्द्ध–तल I, रेखा के नीचे, और

(ii) अर्द्ध–तल II, रेखा के ऊपर

असमीकरण (1) को आलेखित करने के लिए हम कुछ स्वेच्छ बिन्दुओं (arbitrary points) जैसे (0,0), (0,1), (3,5) जो अर्द्ध–तल I में स्थित हैं, का चयन करते हैं तथा जांच करते हैं कि क्या ये x तथा y के मान असमीकरण को संतुष्ट करते हैं, या नहीं। हम देखते हैं कि ये सभी मान असमीकरण को संतुष्ट करते हैं। अब हम अर्द्ध–तल II में स्थित कुछ बिन्दु जैसे (15,1), (18,3) और (20,0) लेते हैं, तथा जाँच करते हैं कि क्या x और y के ये मान असमीकरण को संतुष्ट करते हैं या नहीं। हम देखते हैं कि इनमें से कोई भी असमीकरण को संतुष्ट नहीं करता है। इस प्रकार हम कहते हैं कि अर्द्ध–तल I (आकृति 6.12 में छायांकित) ही असमीकरण का आलेख है। क्योंकि रेखा पर स्थित बिन्दु भी असमीकरण (1) को संतुष्ट करते हैं, इसलिए यह रेखा भी आलेख का एक भाग है। इस प्रकार दिए गए असमीकरण का आलेख रेखा सहित अर्द्ध–तल I है।

आकृति 6.12

स्पष्टतः अर्द्ध–तल II आलेख का भाग नहीं है। इस प्रकार असमीकरण (1) के हल इसके आलेख (रेखा

सहित अर्द्ध–तल) के समस्त बिन्दु हैं। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं, कि असमीकरण (1) के हलों में अपरिमित रूप से अनेक बिन्दु सम्मिलित हैं।

टिप्पणी y अक्ष के समान्तर कोई रेखा निर्देशांक–तल को बाएं और दाएं, दो अर्द्ध–तलों में विभाजित करती है। अन्यथा अन्य रेखा निर्देशांक तल को ऊपर तथा नीचे दो अर्द्ध–तलों में विभाजित करती है।

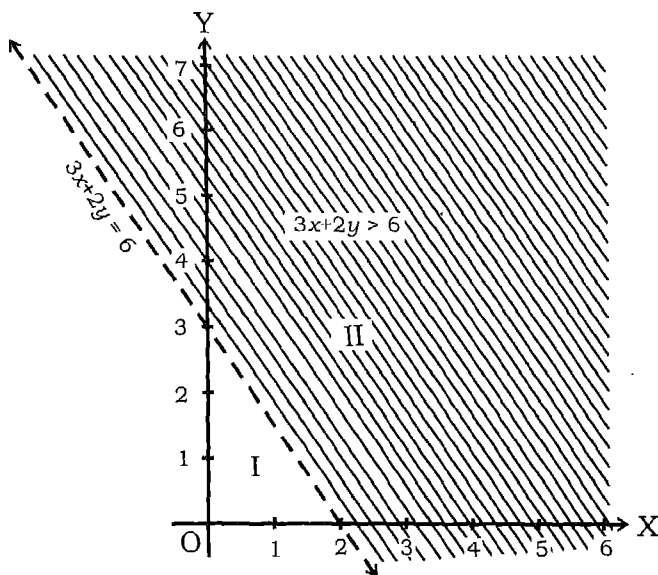
यदि किसी असमीकरण में समता का चिह्न (=) भी सम्मिलित हो तो रेखा के बिन्दु भी उसके हल में सम्मिलित होते हैं। दूसरी स्थिति में वे सम्मिलित नहीं होते हैं, और इस स्थिति में हम रेखा को *बिंदुवत* या *खण्डित* खींचते हैं।

ध्यान दीजिए, किसी असमीकरण द्वारा निरूपित अर्द्ध–तल की पहचान के लिए हम मात्र एक बिन्दु (a,b) (जो रेखा पर नहीं है) को लेकर जांच करते हैं कि क्या यह असमीकरण को संतुष्ट करता है, अथवा नहीं। यदि यह संतुष्ट करता है, तो वह अर्द्ध–तल जिसमें बिन्दु है, असमीकरण को निरूपित करता है अन्यथा असमीकरण उस अर्द्ध–तल को निरूपित करता है, जिसमें बिन्दु नहीं है। सुविधा की दृष्टि से बिन्दु (0,0) को प्राथमिकता दी जाती है।

टिप्पणी वह क्षेत्र जिसमें किसी असमीकरण के सम्पूर्ण हल स्थित हों, उसे उस असमीकरण का **हल**–क्षेत्र (Solution–region) कहते हैं।

अब हम कुछ उदाहरणों की सहायता से दो चर राशीय रैखिक असमीकरणों के हल करने की विधि स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 9 $3x + 2y > 6$ को आलेखीय विधि (Graphically) से हल कीजिए।

हल : सर्वप्रथम हम समीकरण $3x + 2y = 6$ का ग्राफ खण्डित रेखा के रूप में खींचते हैं, (आकृति 6.13), क्योंकि दिए असमीकरण में केवल '>' चिह्न है।

आकृति 6.13

हम एक बिन्दु (जो रेखा पर स्थित नहीं है) जैसे (0,0) का चयन करते हैं जो अर्द्धतल I में स्थित है (आकृति 6.13)। अब जांच करते हैं कि यह बिन्दु दिए असमीकरण को संतुष्ट करता है अथवा नहीं।

दिए हुए असमीकरण में $x = 0,\ y = 0$ रखने पर हम पाते हैं कि

$$3(0) + 2\,(0) > 6$$

या $\quad 0 > 6$, जो असत्य है।

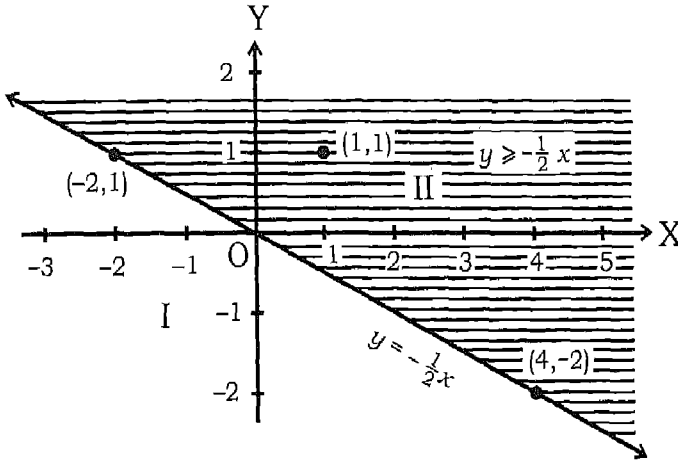
अतः अर्द्ध–तल I, दिए हुए असमीकरण का हल–क्षेत्र नहीं है। दूसरे शब्दों में, छायांकित अर्द्ध–तल II (रेखा के बिन्दुओं को छोड़कर) दिये हुए असमीकरण का हल–क्षेत्र है। ध्यान दें कि रेखा $3x + 2y = 6$ के सभी बिन्दु हल–क्षेत्र में सम्मिलित नहीं हैं।

उदाहरण 10 असमीकरण $y \geq -\frac{1}{2}x$ को आलेखन–विधि से हल कीजिए।

हल पहले हम समीकरण $y = -\frac{1}{2}x$ का आलेख खींचते हैं (आकृति 6.14) । चूंकि असमीकरण में असमता का चिह्न '$\geq$' है, इसलिए हम सतत रेखा (continuous line) का प्रयोग करते हैं, जिससे इंगित होता है कि रेखा के बिन्दु भी दिए असमीकरण के हल हैं।

चूंकि बिन्दु (0,0) उपर्युक्त रेखा पर है, इसलिए इसका प्रयोग वांछित अर्द्ध–तल के निर्धारण में नहीं कर सकते हैं। अतः हम अन्य स्वेच्छ बिन्दु, मान लीजिए, (1, 1) का चयन करते हैं। उपर्युक्त असमीकरण में $x = 1, y = 1$ रखने पर हम पाते हैं कि

$$1 \geq -\frac{1}{2},$$ जो सत्य है।

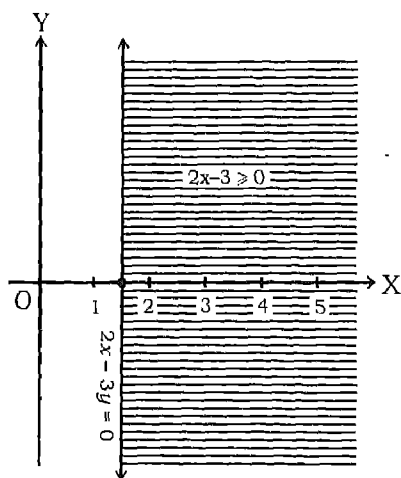
इसलिए दिया असमीकरण छायांकित अर्द्ध–तल II, जिसमें बिन्दु (1, 1) स्थित है, को निरूपित करता है। इसलिए छायांकित क्षेत्र के समस्त बिन्दु रेखा के बिन्दुओं सहित, दिए असमीकरण के हल हैं।

आकृति 6.14

उदाहरण 11 द्विविमीय तल में असमीकरण $2x - 3 \geq 0$ को आलेखन–विधि से हल कीजिए।

हल ध्यान दीजिए कि द्विविमीय तल में

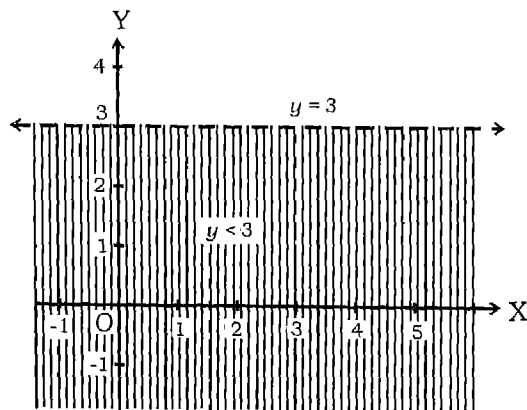
$$2x - 3 = 0 \quad \text{अथवा} \quad x = \frac{3}{2}$$

y–अक्ष के समान्तर एक रेखा निरूपित करता है और आरेख एक ऊर्ध्वाधर रेखा है। इस रेखा का प्रत्येक बिन्दु y अक्ष के दाहिने ओर $\frac{3}{2}$ इकाई की दूरी पर स्थित है। हम रेखा $x = \frac{3}{2}$ खींचते हैं (आकृति 6.15.)। दिए असमीकरण में $x = 0$ रखने पर हम पाते हैं कि $2(0) - 3 \geq 0$ या $-3 \geq 0$, जो असत्य है।

इस प्रकार दिए असमीकरण का हल क्षेत्र रेखा $x = \frac{3}{2}$ के दाहिने ओर छायांकित भाग है। अतः, रेखा के दाहिने ओर के सभी बिन्दु (रेखा पर स्थित सभी बिन्दुओं सहित) दिए हुए असमीकरण के हल हैं।

आकृति 6.15

उदाहरण 12 $y < 3$ को आलेखन विधि से हल कीजिए।

हल समीकरण $y = 3$ का आलेख x – अक्ष के समान्तर एक रेखा है (आकृति 6.16.)।

इस दिए हुए असमीकरण में $y = 0$ रखने पर हम पाते हैं कि $0 < 3$, जो सत्य है। इस प्रकार रेखा $y = 3$ के नीचे का क्षेत्र जिसमें मूल बिन्दु स्थित है, दिए हुए असमीकरण का हल क्षेत्र है। अतः रेखा के नीचे के समस्त बिन्दु (जिसमें रेखा के बिन्दु सम्मिलित नहीं हैं) दिए हुए असमीकरण के हल हैं।

आकृति 6.16

प्रश्नावली 6.3

निम्नांकित असमीकरणों को आलेख–विधि से द्विविमीय तल में निरूपित कीजिए तथा उन्हें हल कीजिए।

1. $x - 2y + 4 \leq 0$
2. $2x + y > 3$
3. $x - 2y \leq -1$
4. $3x - 4y < 12$
5. $y + 8 \geq 2x$
6. $2x \leq 6 - 3y$
7. $0 \leq 2x - 5y + 10$
8. $x - y \leq 2$
9. $2x - 3y < 6$
10. $-3x + 2y \geq 6$
11. $x > -2$
12. $x < -3$
13. $y < -2$
14. $3y - 5x < 30$
15. $x \leq 8 - 4y$

6.6 दो चर राशियों के असमीकरण निकाय का हल

पिछली कक्षाओं में हम दो चर राशियों के रैखिक समीकरणों का बीजगणितीय और आलेखीय विधि से हल करना सीख गये हैं। पूर्व अनुभागों में हम एक अथवा दो चर राशियों के रैखिक असमीकरणों का आलेखीय विधि से हल निकालना सीख चुके हैं। अब हम कुछ उदाहरणों की सहायता से दो चर राशियों के असमीकरण निकाय को हल करने की विधि स्पष्ट करेगें।

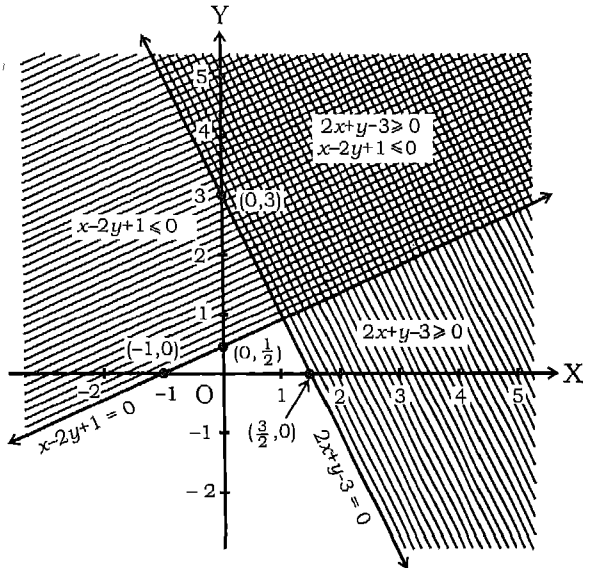
उदाहरण 13 निम्नांकित असमीकरण निकाय

$$2x + y - 3 \geq 0 \quad (1)$$

$$x - 2y + 1 \leq 0 \quad (2)$$

को आलेखीय विधि से हल कीजिए।

हल

चरण I अनुभाग 6.5 में बताई गयी विधि से हम सर्वप्रथम रैखिक समीकरण $2x + y - 3 = 0$ का आलेख खींचते हैं (आकृति 6.17)। तब हम देखते हैं कि असमीकरण (1), रेखा $2x + y - 3 = 0$ के ऊपरी छांयाकित क्षेत्र द्वारा निरूपित

आकृति 6.17

होता है, जिसमें रेखा के बिन्दु भी सम्मिलित हैं।

चरण 2 उन्हीं **निर्देशाक्षों** पर हम समीकरण $x-2y+1=0$ का भी आलेख खींचते हैं (आकृति 6.17)। तब, असमीकरण (2), रेखा $x-2y+1=0$ के ऊपरी छायांकित क्षेत्र द्वारा निरूपित होता है, जिसमें रेखा के बिन्दु भी सम्मिलित हैं।

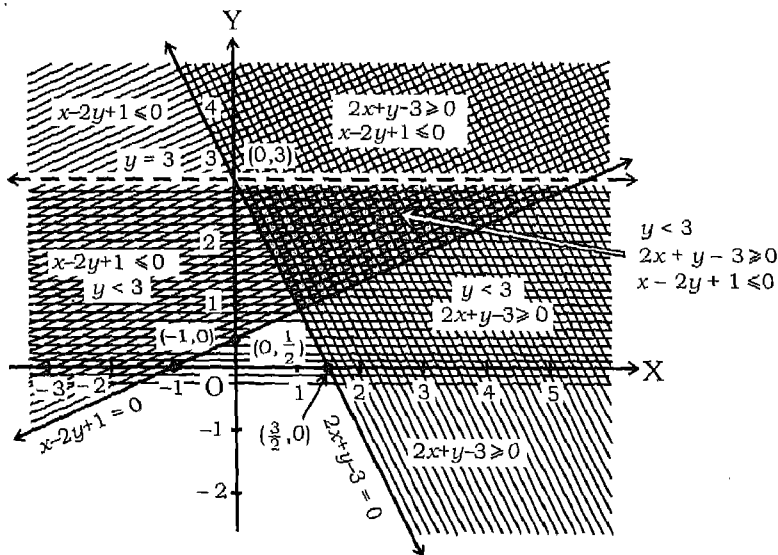
स्पष्टतः द्वि–छायांकित (double shaded region) क्षेत्र जो उपर्युक्त दोनों छायांकित क्षेत्रों में उभयनिष्ठ है, वही दिए हुए असमीकरण निकाय (1) और (2) का वांछित हल क्षेत्र है। इस प्रकार, इस उभयनिष्ठ छायांकित क्षेत्र के समस्त बिन्दु ही दिए असमीकरण निकाय के हल हैं।

उदाहरण 14 निम्नांकित रैखिक असमीकरण निकाय को आलेखन विधि द्वारा हल कीजिए।

$$2x+y-3 \geq 0 \quad (1)$$

$$x-2y+1 \leq 0 \quad (2)$$

$$y < 3 \quad (3)$$

हल सर्वप्रथम हम समीकरणों $2x+y-3=0$, $x-2y+1=0$ और $y=3$ द्वारा निरूपित रेखाओं के आलेख खींचते हैं।

आकृति 6.18

तब हम देखते हैं कि असमीकरण (1) और (2) संगत रेखाओं के ऊपर दो छायांकित क्षेत्रों को निरूपित करते हैं, जिनमें संगत रेखाओं के सभी बिन्दु भी सम्मिलित हैं (आकृति 6.18)। असमीकरण (3), रेखा $y = 3$ के नीचे का छायांकित क्षेत्र जिसमें इस रेखा के बिन्दु सम्मिलित नहीं हैं, को निरूपित करता है। अतः उपर्युक्त तीनों क्षेत्रों में सर्वनिष्ठ त्रिभुजाकार क्षेत्र के समस्त बिन्दु जो त्रिविधि छायांकित (triple shaded) है जिसमें रेखा $y = 3$ के सभी बिन्दु सम्मिलित नहीं है, ही दिए हुए असमीकरण निकाय के हल हैं (आकृति 6.18)।

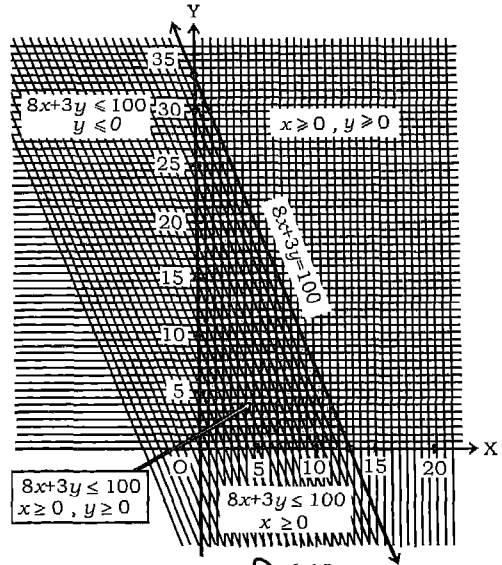
बहुत सी व्यावहारिक स्थितियों में जो असमीकरण–निकाय से युक्त हैं, चर राशियां x और y प्रायः ऐसी राशियां होती हैं, जो ऋणात्मक नहीं हो सकती है। उदाहरणतः उत्पादित इकाइयों की संख्या, क्रय की गई वस्तुओं की संख्या, काम करने में लगे घंटों की संख्या आदि। स्पष्टतः ऐसी परिस्थिति में $x \geq 0$ और $y \geq 0$, और हल क्षेत्र प्रथम चर्तुथांश में ही होता है।

आइए अब हम कुछ ऐसे असमीकरण निकाय पर विचार करते हैं, जिनमें $x \geq 0, y \geq 0$ हों।

उदाहरण 15 निम्नांकित असमीकरण निकाय को आलेखीय विधि से हल कीजिए।

$$8x + 3y \leq 100$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

हल हम रेखा $8x + 3y = 100$ का आलेख खींचते हैं। असमीकरण $8x + 3y \leq 100$, इस रेखा के नीचे के छायांकित क्षेत्र को निरूपित करता है, जिसमें रेखा $8x + 3y = 100$ के सभी बिन्दु सम्मिलित हैं (आकृति 6.19)

आकृति 6.19

चूंकि $x \geq 0$, $y \geq 0$, अतः त्रिविध छायांकित (triple shaded) क्षेत्र का प्रत्येक बिन्दु जो प्रथम चर्तुथांश में है, तथा जिसमें रेखाओं के बिन्दु भी सम्मिलित हैं, दिए हुए असमीकरण निकाय का हल निरूपित करता है।

उदाहरण 16 निम्नांकित असमीकरण निकाय को आलेखीय विधि से हल कीजिए।

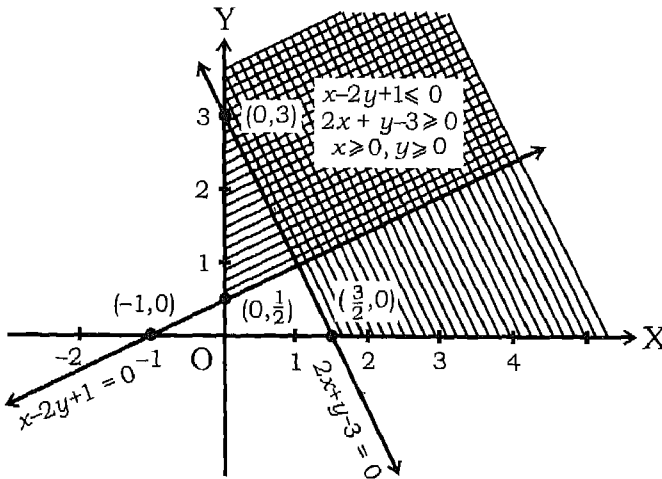
$$2x + y - 3 \geq 0 \quad (1)$$

$$x - 2y + 1 \leq 0 \quad (2)$$

$$x \geq 0 \quad (3)$$

$$y \geq 0 \quad (4)$$

हल हम रेखाओं $2x + y - 3 = 0$ और $x - 2y + 1 = 0$ का आलेख खींचते हैं। असमीकरण (1) और (2) दोनों संगत रेखाओं के बिन्दुओं सहित अपने से ऊपर स्थित क्षेत्रों को निरूपित करते हैं।

चूंकि $x \geq 0, y \geq 0$, अतः प्रथम चर्तुथांश में स्थित सर्वनिष्ठ छायांकित क्षेत्र के प्रत्येक बिन्दु दिए हुए असमीकरण निकाय के हल को निरूपित करता हैं (आकृति 6.20)।

आकृति 6.20

उदाहरण 17 निम्नांकित असमीकरण निकाय का आलेख विधि द्वारा हल ज्ञात कीजिए।

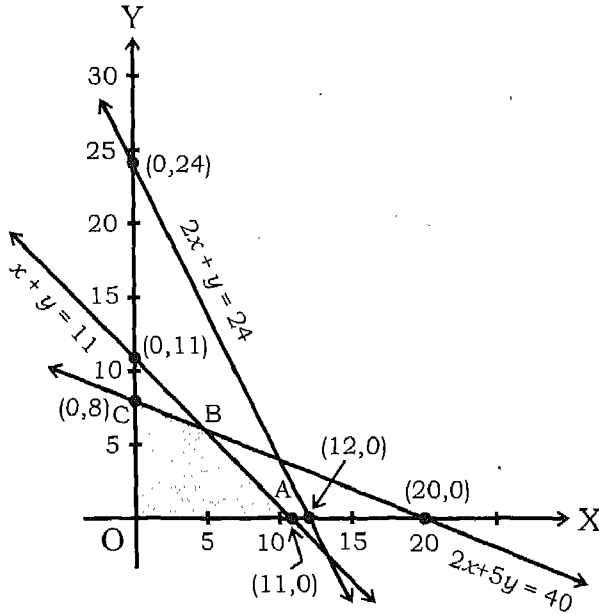
$$2x + y \leq 24 \quad (1)$$

$$x + y \leq 11 \quad (2)$$

$$2x + 5y \leq 40 \quad (3)$$

$$x \geq 0 \quad (4)$$

$$y \geq 0 \quad (5)$$

हल पहले हम रेखाओं $2x + y = 24$, $x + y = 11$ और $2x + 5y = 40$ का आलेख खींचते हैं। असमीकरण (1), (2) तथा (3) क्रमशः तीनों रेखाओं के सभी बिन्दुओं तथा इन रेखाओं के नीचे स्थित छायांकित क्षेत्रों को निरूपित करते हैं। चूंकि $x \geq 0$ और $y \geq 0$, अतः प्रथम चर्तुथांश से स्थित सर्वनिष्ठ चर्तुभुजाकार क्षेत्र OABC का प्रत्येक बिन्दु दिए गये असमीकरण निकाय के एक हल को निरूपित करता है (आकृति 6.21)।

आकृति 6.21

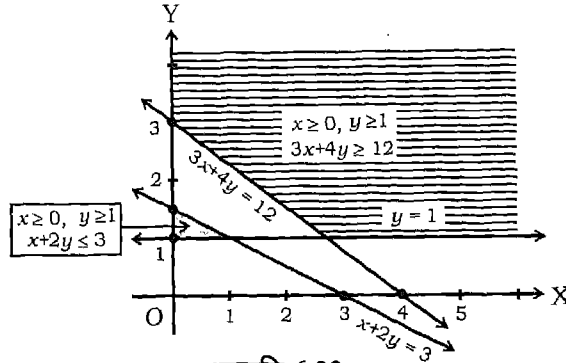
उदाहरण 18 निम्नांकित असमीकरण निकाय का हल आलेखीय विधि से ज्ञात कीजिए।

$$x + 2y \leq 3$$

$$3x + 4y \geq 12$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 1$$

हल हम असमीकरणों $x + 2y \leq 3, 3x + 4y \geq 12, x \geq 0$ और $y \geq 1$ के आलेखों को खींचते हैं। दिए हुए असमीकरणों द्वारा निरूपित छायांकित क्षेत्र आकृति 6.22 में प्रदर्शित हैं। हम देखते हैं कि इन असमीकरणों द्वारा निरूपित क्षेत्रों का कोई सर्वनिष्ठ क्षेत्र नहीं है। अतः हम निष्कर्ष निकालते हैं कि दिए हुए असमीकरण निकाय का कोई हल नहीं है।

आकृति 6.22

प्रश्नावली 6.4

निम्नांकित असमीकरण निकाय को आलेखीय विधि से हल कीजिए –

1. $x + 2y \geq 20, 3x + y \leq 15$

2. $4x + 3y \geq 12, 4x - 5y \geq -20$

3. $x + y > 6,\ 2x - y > 0$

4. $2x + y \geq 8,\ x + 2y \geq 10$

5. $y \leq 4, x \geq 1$

6. $2x - y > 1,\ x - 2y < -1$

7. $5x + 6y \geq 30,\ x \geq 0, y \geq 0$

8. $x + y \leq 9,\ y > x, x \geq 1$

9. $x + 3y \leq 12,\ 3x + y \leq 12,\ x \geq 0, y \geq 0$

10. $3x + 2y \geq 24,\ 3x + y \leq 15,\ x \geq 4$

11. $3x + 4y \leq 60,\ x + 3y \leq 30,\ x \geq 0, y \geq 0$

12. $2x + y \geq 4, x + y \leq 3, 2x - 3y \leq 6$

13. $x + y < 6, 7x + 4y \leq 28, x \geq 0, y \geq 0$

14. $6x + 5y \leq 150, x + 4y \leq 80, x \leq 15, x \geq 0, y \geq 0$

15. $3x + 2y \leq 24, x + 2y \leq 16, x + y \leq 10, x \geq 0, y \geq 0$

6.7 अनुप्रयोग

अब तक इस अध्याय में हमने रैखिक असमीकरणों को हल करना सीखा है। अब हम अर्थशास्त्र, विज्ञान, गणित, मनोविज्ञान इत्यादि के क्षेत्रों से सम्बन्धित प्रश्नों के हल करने में इस ज्ञान का प्रयोग करेंगें।

उदाहरण 19 किसी पाठ्यक्रम में ग्रेड 'A' पाने के लिए एक व्यक्ति को सभी पांच परीक्षाओं (प्रत्येक 100 में से) में 90 अंक या अधिक अंक का औसत प्राप्त करना चाहिए। यदि सुनीता के प्रथम चार परीक्षाओं के प्राप्तांक 87, 92, 94 और 95 हों तो वह न्यूनतम अंक ज्ञात कीजिए जिसे पांचवी परीक्षा में प्राप्त करके सुनीता उस पाठ्यक्रम में ग्रेड 'A' पायेगी।

हल मान लीजिए कि पांचवी परीक्षा में सुनीता x अंक प्राप्त करती है।

तब

$$\frac{87+92+94+95+x}{5} \geq 90$$

या $\quad 368 + x \geq 450$

या $\quad x \geq 82$

इस प्रकार सुनीता को पाठ्यक्रम में ग्रेड A पाने के लिए पांचवी परीक्षा में न्यूनतम 82 अंक प्राप्त करना चाहिए।

उदाहरण 20 क्रमागत विषम संख्याओं के ऐसे युग्म ज्ञात कीजिए, जिनमें दोनों संख्याएं 10 से बड़ी हों, और उनका योगफल 40 से कम हो।

हल मान लिया कि दो क्रमागत बिषम प्राकृत संख्याओं में छोटी विषम संख्या x है।

इस प्रकार दूसरी विषम संख्या $x + 2$ है।

अतः प्रश्नानुसार

$$x > 10 \qquad (1)$$

तथा $$x + (x + 2) < 40 \qquad (2)$$

(2) को हल करने पर हम पाते हैं कि

$$2x + 2 < 40$$

या $$x < 19 \qquad (3)$$

(1) और (2) से निष्कर्ष यह है कि

$$10 < x < 19$$

इस प्रकार विषम संख्या x के अभीष्ट मान 10 और 19 के बीच हैं। इसलिए सभी सम्भव अभीष्ट जोड़े (11, 13), (13, 15), (15, 17), (17, 19) होंगे।

उदाहरण 21 किसी प्रयोग में नमक के अम्ल के एक विलयन का तापमान 30^0 सेल्सियस और 35^0 सेल्सियस के बीच ही रखना है। फारेनहाइट पैमाने पर तापमान का परिसर ज्ञात कीजिए, यदि सेन्ट्रीग्रेड से फारेनाहाइट पैमाने पर परिवर्तन सूत्र

$$C = \frac{5}{9}\,(F - 32)$$

है, जहाँ C और F क्रमशः तापमान को अंश सेल्शियस तथा अंश फारेनहाइट में निरूपित करते हैं।

हल ज्ञात है कि

$$30 < C < 35$$

$C = \frac{5}{9}$ (F–32), रखने पर हम पाते हैं,

$$30 < \frac{5}{9}\,(F - 32) < 35$$

या $\frac{9}{5} \times (30) < (F-32) < \frac{9}{5} \times (35)$

या $54 < (F - 32) < 63$

या $86 < F < 95$

इस प्रकार तापमान का अभीष्ट परिसर 86^0 F से 95^0 F है जिसमें 86^0 F तथा 95^0 F सम्मिलित नहीं हैं।

उदाहरण 22 एक निर्माता के पास अम्ल के 12% विलयन के 600 लीटर हैं। ज्ञात कीजिए कि 30% अम्ल वाले विलयन के कितने लीटर उसमें मिलाए जाऐं ताकि परिणामी मिश्रण में अम्ल की मात्रा 15% से अधिक परन्तु 18% से कम हो।

हल: मान लीजिए कि 30% अम्ल के विलयन की मात्रा x लीटर है । तब

सम्पूर्ण मिश्रण = $(x + 600)$ लीटर

इसलिए

30% x +600 का (12%) > $(600 + x)$ का 15%

और 30% x + 600 का (12%) < $(600 + x)$ का 18%

या $\frac{30x}{100} + \frac{12}{100}(600) > \frac{15}{100}(x+600)$

और $\frac{30x}{100} + \frac{12}{100}(600) < \frac{18}{100}(x+600)$

या $30x + 7200 > 15x + 9000$

और $30x + 7200 < 18x + 10800$

या $15x > 1800$ और $12x < 3600$

या $x > 120$ और $x < 300$

अर्थात $120 < x < 300$.

इस प्रकार 30% अम्ल के विलयन की अभीष्ट मात्रा 120 लीटर से अधिक तथा 300 लीटर से कम होनी चाहिए।

प्रश्नावली 6.5

1. प्रथम चार परीक्षाओं में हमीद के प्राप्तांक (प्रत्येक 100 मे से) 94, 73, 72 और 84 हैं। एक पाठ्यक्रम में ग्रेड B पाने हेतु यदि अन्तिम औसत 80 से अधिक और 90 से कम आवश्यक हो तो ज्ञात कीजिए कि पांचवी परीक्षा में हमीद के प्राप्तांक के परिसर क्या हों, जिससे उसे ग्रेड B मिल सके।

2. दो परीक्षाओं में एक छात्र के प्राप्तांक 70 और 75 है। वह न्यूनतम अंक ज्ञात कीजिए, जिसे तीसरी परीक्षा में पाकर वह छात्र 60 अंक का न्यूनतम औसत प्राप्त कर सके।

3. 10 से कम क्रमागत विषय संख्याओं के ऐसे युग्म ज्ञात कीजिए जिनके योगफल 11 से अधिक हों।

4. क्रमागत सम संख्याओं के ऐसे युग्म ज्ञात कीजिए, जिनमें से प्रत्येक 5 से बड़े हों, तथा उनका योगफल 23 से कम हो।

5. एक त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा सबसे छोटी भुजा की तीन गुनी है तथा त्रिभुज की तीसरी भुजा सबसे बड़ी भुजा से 2 सेमी कम है। तीसरी भुजा की न्यूनतम लम्बाई ज्ञात कीजिए जबकि त्रिभुज का परिमाप न्यूनतम 61 सेंमी है।

6. 91 सेमी लम्बे बोर्ड से एक व्यक्ति तीन लम्बाईयां काटना चाहता है। दूसरी लम्बाई सबसे छोटी लम्बाई से 3 सेंमी अधिक और तीसरी लम्बाई सबसे छोटी लम्बाई की दूनी है। सबसे छोटे बोर्ड की सम्भावित लम्बाईयां क्या है, यदि तीसरा टुकड़ा दूसरे टुकड़े से कम से कम 5 सेंमी लम्बा हो?
[**संकेत** यदि सबसे छोटे बोर्ड की लम्बाई x सेमी हो, तब $(x + 3)$ सेमी और $2x$ सेमी क्रमशः दूसरे और तीसरे टुकड़ों की लम्बाईयां हैं। इस प्रकार $x + (x+3) + 2x \leq 91$ और $2x \geq (x+3) + 5$]

7. एक विलयन को 68^0 F और 77^0F के मध्य रखना है। सेल्सियस पैमाने पर विलयन के तापमान का परिसर ज्ञात कीजिए, जहां सेलसियस/फार्नहाईट परिवर्तन सूत्र

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$ है।

8. 8% बोरिक एसिड के एक विलयन में 2% बोरिक एसिड का विलयन मिलाकर तनु (dilute) किया जाता है। परिणामी मिश्रण में बोरिक एसिड 4% से अधिक तथा 6% से कम होना चाहिए। यदि हमारे पास 8% विलयन की मात्रा 640 लीटर हो तो ज्ञात कीजिए कि 2% विलयन के कितने लीटर इसमें मिलाने होंगे।

9. 45% अम्ल के 1125 लीटर विलयन में कितना पानी मिलाया जाय कि परिणामी मिश्रण में अम्ल 25% से अधिक परन्तु 30% से कम हो जाए ?

10. एक तालाब के पानी की अम्लता सामान्य समझी जाती है यदि प्रतिदिन के तीन मापों का औसत pH, 7.2 और 7.8 के मध्य हो। यदि किसी दिन के प्रथम दो pH, 7.48 और 7.85 हों, तो तीसरे पाठ्यांक का परिसर ज्ञात कीजिए जिससे पानी की अम्लता सामान्य हो जाए।

11. विश्व में सबसे अधिक गहराई के छिद्र की खुदाई से यह पाया गया कि पृथ्वी तल के नीचे x किलोमीटर की गहराई पर तापमान T (अंश सेल्सियस में)

$$T = 30 + 25(x - 3),\ 3 < x < 15$$

से प्राप्त किया जाता है। किस गहराई पर तापमान 200^0 C और 300^0 C के मध्य होगा ?

12. एक व्यक्ति के बौद्धिक–लब्धि (IQ) मापन का सूत्र निम्नांकित है :

$$IQ = \frac{MA}{CA} \times 100,$$

जहां MA मानसिक आयु और CA कालानुक्रमी आयु है। यदि 12 वर्ष की आयु के बच्चों के एक समूह की IQ, असमीकरण $80 \leq IQ \leq 140$ द्वारा व्यक्त हो, तो उस समूह के बच्चों की मानसिक आयु का परिसर ज्ञात कीजिए।

13. एक कम्पनी कैसेट्स का निर्माण करती है, तथा एक सप्ताह के लिए इसका क्रय समीकरण (Cost equation) $C = 300 + 1.5x$ और राजस्व समीकरण (Revenue equation) $R = 2x$ हैं, जहां सप्ताह में बेचे गये कैसेट्स की संख्या x है। ज्ञात कीजिए कि कम्पनी को लाभ कमाने के लिए कितने कैसेट्स की बिक्री करनी चाहिए।

विविध उदाहरण

उदाहरण 23 हल कीजिए : $-2 \le 6x - 1 < 2$

हल इस स्थिति में हमारे पास दो असमीकरण $-2 \le 6x - 1$ और $6x - 1 < 2$ हैं। इन्हें हम साथ–साथ हल करना चाहते हैं। हम दिए गए असमीकरण के मध्य में अचर राशि को शून्य तथा चर राशि के गुणांक को एक बनाते हैं। हमें ज्ञात है, कि

$$-2 \le 6x - 1 < 2$$

या $\quad -2 + 1 < 6x - 1 + 1 < 2 + 1$ (दोनों पक्षों में 1 जोड़ने पर)

या $\quad -1 \le 6x < 3$

या $\quad -\frac{1}{6} \le x < \frac{3}{6}$ (6 से भाग करने पर)

या $\quad -\frac{1}{6} \le x < \frac{1}{2}$

उदाहरण 24 हल कीजिए $-3 \le \frac{4-7x}{2} \le 18$

हल ज्ञात है कि

$$-3 \le \frac{4-7x}{2} \le 18$$

या $\quad -3 \times 2 \le \frac{4-7x}{2} \times 2 \le 18 \times 2$

या $\quad -6 \le 4 - 7x \le 36$

या $\quad -6 - 4 \le 4 - 7x - 4 \le 36 - 4$

या $\quad -10 \le -7x \le 32$

या $\quad \frac{10}{7} \ge x \ge \frac{-32}{7}$,

या $\quad \frac{-32}{7} \le x \le \frac{10}{7}$

जिसे हम $\frac{-32}{7} \le x \le \frac{10}{7}$ के रूप में भी लिख सकते हैं।

उदाहरण 25 $|x| < 5$ हल कीजिए।

हल **प्रथम स्थिति** यदि $x \ge 0$ है, तो इस स्थिति में $|x| = x$ और इस प्रकार

$$x < 5$$

अतः इस स्थिति में दिए असमीकरण के हल $x \ge 0$ और $x < 5$ द्वारा व्यक्त हैं।

अर्थात् $\quad 0 \le x < 5 \quad (1)$

द्वितीय स्थिति यदि $x < 0$ तो $|x| = -x$ इस प्रकार दिए असमीकरण का परिवर्तित रूप

$$-x < 5$$

या $\quad x > -5$

अतः इस स्थिति में दिए असमीकरण के हल $x < 0$ और $x > -5$ द्वारा व्यक्त हैं।

इनका सम्मिलित रूप $\quad -5 < x < 0 \quad (2)$

है।

(1) और (2) को मिलाने पर $|x| < 5$ के अभीष्ट हल हैं :

$$-5 < x < 5$$

अर्थात -5 और 5 के मध्य की सभी वास्तविक संख्याएं हैं। (3)

टिप्पणी असमीकरण $|x| \le 5$ का हल -5 और 5 के मध्य स्थित सभी वास्तविक संख्याएं हैं जिनमें -5 और 5 भी सम्मिलित होंगे,

अर्थात $\quad -5 \le x \le 5 \quad (4)$

इस प्रकार $|x| \le 5$, $-5 \le x \le 5$ के समतुल्य हैं।

उदाहरण 26 $|x| > 5$ को हल कीजिए।

हल हम पुनः दोनों स्थितियों अर्थात् $x \geq 0$ और $x < 0$ पर विचार करते हैं।

यदि $x \geq 0$, तो $|x| = x$

अतः $|x| > 5$ से प्राप्त होता है

$$x > 5$$

इस प्रकार इस स्थिति में दिए हुए असमीकरण के हल

$$x \geq 0 \text{ और } x > 5, \qquad (1)$$

हैं अर्थात् अपर्युक्त दोनों असमीकरणों के उभयनिष्ठ हल $x > 5$ हैं।

पुनः द्वितीय स्थिति में यदि $x < 0$ है, तो $|x| = -x$

अर्थात् $\quad -x > 5$

या $\quad x < -5$

इस प्रकार इस स्थिति में दिए हुए असमीकरण के हल $x < 0$ और $x < -5$ हैं।

अर्थात् $\quad x < -5 \qquad (2)$

(1) और (2) का सम्मिलित रूप

$$x < -5 \text{ या } x > 5, \text{ है।} \qquad (3)$$

इसका अर्थ है कि वास्तविक संख्याएं x या तो -5 से छोटी या 5 से बड़ी हैं।

टिप्पणी $|x| \geq 5$ के हल ऐसी वास्तविक संख्याएं x हैं, जो या तो -5 से छोटी अथवा बराबर है, या 5 से बड़ी अथवा बराबर हैं।

अर्थात् $\quad x \leq -5$ या $x \geq 5$

इस प्रकार $\quad |x| \leq 5$, $x \leq -5$ या $x \geq 5$ के समतुल्य है।

उपर्यूक्त विवेचनाओं के परिपेक्ष में हम अब निम्नांकित महत्वपूर्ण परिणामों का वर्णन कर सकते

हैं। इनका सीधा प्रयोग निरपेक्ष मान वाले असमीकरण के हल करने में किया जा सकता है।

$a > 0$ के लिए

I. $|x| \leq a$ यदि और केवल यदि $-a \leq x \leq a.$

II. $|x| \geq a$ यदि और केवल यदि $x \leq -a$ या $x \geq a.$

उदाहरण 27 $|3x-2| \leq \frac{1}{2}$ को हल कीजिए।

हल ज्ञात है कि

$$|3x-2| \leq \frac{1}{2}$$

माना कि $y = 3x - 2$

इसलिए $|y| \leq \frac{1}{2}$

या $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$ [नियम I से]

या $-\frac{1}{2} \leq 3x-2 \leq \frac{1}{2}$

या $-\frac{1}{2}+2 \leq 3x-2+2 \leq \frac{1}{2}+2$

या $\frac{3}{2} \leq 3x \leq \frac{5}{2}$

या $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \leq \frac{3x}{3} \leq \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3}$

या $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{6}$

अर्थात् दिए असमीकरण के वास्तविक संख्याएं x जो $\frac{1}{2}$ और $\frac{5}{6}$ के बीच स्थित हैं, तथा उनमें

$\frac{1}{2}$ और $\frac{5}{6}$ भी सम्मिलित हों, अभीष्ट हल हैं।

उदाहरण 28 $|x+1| \geq 3$ को हल कीजिए।

हल $|x+1| \geq 3$ का अर्थ है

$x + 1 \geq 3$ या $x + 1 \leq -3$, [नियम II]

अर्थात् $x \geq 2$ या $x \leq -4$,

अर्थात् ऐसी वास्तविक संख्याएं x जो 2 से बड़ी या बराबर अथवा -4 से छोटी अथवा बराबर हैं, अभीष्ट हल हैं।

उदाहरण 29 $\frac{x-3}{x+5} > 0$ को हल कीजिए।

हल स्पष्टतः $x + 5 \neq 0$

(i) माना कि $x + 5 > 0$, अर्थात् $x > -5$

तो $\frac{x-3}{x+5} > 0$ से प्राप्त होता है $x - 3 > 0$ अर्थात $x > 3$

इस प्रकार $x > -5$ और $x > 3$

अतः $x > 3$

(ii) माना कि $x + 5 < 0$, या $x < -5$

तो इस स्थिति में $\frac{x-3}{x+5} > 0$ से $x - 3 < 0$ अर्थात् $x < 3$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार $x < -5$ और $x < 3$

अतः $x < -5$

इस प्रकार दिए असमीकरण के हल $x > 3$ या $x < -5$ हैं।

विकल्पतः $\frac{x-3}{x+5}>0$ को निम्न रूप से लिखा जा सकता है

$$\frac{x-3}{(x+5)}(x+5)^2 > 0.\ (x+5)^2,$$ [चूंकि $(x+5)^2$ धनात्मक है]

या $(x-3)(x+5) > 0.$

दो गुणनखण्डों $(x-3)$ और $(x+5)$ का गुणनफल धनात्मक होगा

यदि $x-3>0$ और $x+5>0$

या $(x-3)<0$ और $x+5<0,$

अर्थात् $x>3$ और $x>-5$ या $x<3$ और $x<-5$

इस प्रकार दिए गए असमीकरण के हल है

$x>3$ या $x<-5.$

अध्याय 6 पर विविध प्रश्नावली

निम्नांकित असमीकरणों को हल कीजिए

1. $0<-\frac{x}{3}<1$

2. $6 \leq -3(2x-4) < 12$

3. $-3 \leq 4-7x < 18$

4. $-2 < 1-3x < 7$

5. $-7 < 2x-3 < 7$

6. $-12 < 3x-5 \leq -4$

7. $-12 \leq \frac{4-3x}{-5} < 2$

8. $-15 < \frac{3(x-2)}{5} \leq 0$

9. $\left|x+\frac{1}{4}\right| > \frac{7}{4}$

10. $\left|\frac{3x-4}{2}\right| \leq \frac{5}{12}$

11. $|4-x|+1<3$

12. $\frac{2}{x-3}<0$

13. $\frac{x-5}{x+2} < 0$ **14.** $\frac{x+8}{x+2} > 1$ [संकेत $\frac{x+8}{x+2} - 1 > 0$]

15. एक प्लम्बर को निम्नांकित दो विधियों से भुगतान किया जा सकता है।

I : 600 रू और 50 रू प्रति घण्टा

II: 170 रू प्रति घण्टा

यदि कार्य में n घण्टे लगते हो, तो n के किन मानों के लिए प्लम्बर को विधि I द्वारा विधि II की तुलना में अच्छा भुगतान प्राप्त होता है ?

द्विघातीय समीकरण (QUADRATIC EQUATIONS)

अध्याय 7

7.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं मे हम वास्तविक गुणांको वाले द्विघातीय समीकरण पढ़ चुके हैं। एक द्विघातीय समीकरण का व्यापक रूप

$$ax^2+bx+c=0, \quad a \neq 0 \tag{1}$$

है, जहां a, b और c वास्तविक संख्याऐं हैं। स्मरण कीजिए कि द्विघातीय समीकरण के अधिकतम दो मूल होते हैं जो समान अथवा असमान, वास्तविक अथवा अवास्तविक हो सकते हैं समीकरण (1) के मूल x_1, x_2 इसके गुणांकों a, b और c के पद में निम्नांकित हैं।

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{और} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{2}$$

मूलों का समान या असमान, वास्तविक अथवा अवास्तविक होना राशि b^2-4ac के मान पर निर्भर करता है। राशि b^2-4ac जिसे D से व्यक्त किया जाता है, को समीकरण (1) का विविक्तकर (Discriminant) कहते हैं। समीकरण (1) के मूलों, जो (2) में दिए गए हैं, को देखने से स्पष्ट है, कि

(i) यदि $b^2-4ac=0$, तो समीकरण (1) के दोनों मूल $\frac{-b}{2a}$ हो जातें हैं और इस प्रकार वे वास्तविक और समान हैं।

(ii) यदि b^2-4ac धनात्मक तथा पूर्ण वर्ग है, तब $\sqrt{b^2-4ac}$ परिमेय है, अतः समीकरण (1) के मूल परिमेय और असमान हैं।

(iii) यदि b^2-4ac धनात्मक परन्तु पूर्ण वर्ग नही है, तब $\sqrt{b^2-4ac}$ वास्तविक परन्तु अपरिमेय है। अतः इस स्थिति में समीकरण (1) के मूल अपरिमेय और असमान हैं। (ध्यान दीजिए कि परिमेय गुणाकों वाले द्विघातीय समीकरण के अपरिमेय मूल सदैव संयुग्मी–युग्मों

(conjugate-pairs) में होते है जैसे संयुग्मी–युग्म $1+\sqrt{2}$ और $1-\sqrt{2}$ तथापि अपरिमेय गुणांक वाले द्विघातीय समीकरणों के मूल संयुग्मी–युग्मों में नहीं हो सकते हैं। उदाहरणतः समीकरण $x^2-\left(2+\sqrt{3}\right)x+2\sqrt{3}=0$ के मूल 2 और $\sqrt{3}$ हैं जो एक संयुग्मी–युग्म नहीं है।)

(iv) यदि b^2-4ac ऋणात्मक है, तब अध्याय 5 के अनुसार $\sqrt{b^2-4ac}$ अधिकल्पित (Imaginary) है, अतः वास्तविक मूलों का अस्तित्व इस स्थिति में नहीं होता है।

इस अध्याय में हम मुख्यतः वास्तविक गुणांको वाले ऐसे द्विघातीय समीकरणों की चर्चा करेगें, जिनका विविक्तकर ऋणात्मक होता है।

7.2 वास्तविक गुणांको वाले द्विघातीय समीकरण

स्मरण करें कि द्विघातीय समीकरण मुख्यतः दो विधियों से, गुणनखण्डों में विभक्त करके, और द्विघातीय सूत्र (2) का प्रयोग करके हल किए जा सकते हैं। वास्तविक गुणांको तथा वास्तविक मूलों वाले द्विघातीय समीकरणों के विषय में हम पिछली कक्षाओं में अध्ययन कर चुके हैं। यहां हमारा ध्यान मुख्यतः गुणांको तथा सम्मिश्र मूलों (complex roots) वाले द्विघातीय समीकरणों पर केन्द्रित होगा।

मान लीजिए कि b^2-4ac ऋणात्मक है। तब $4ac-b^2$ धनात्मक होगा। अतः सम्मिश्र संख्याओं के अध्ययन के फलस्वरूप, दो सम्मिश्र संख्याएँ

$$z_1=i\sqrt{4ac-b^2} \quad \text{और} \quad z_2=-i\sqrt{4ac-b^2}$$

ऐसी हैं, कि $z_1^2=z_2^2=b^2-4ac$ इनके अतिरिक्त अन्य कोई सम्मिश्र संख्या z नहीं है जिसके लिए $z^2=b^2-4ac$ है। इस प्रकार b^2-4ac के ऋणात्मक होने की स्थिति में समीकरण (1) के मूल निम्नांकित हैं।

$$x_1=\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \quad \text{और} \quad x_2=\frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

ध्यान दीजिए कि उपर्युक्त दोनों मूल असमान और परस्पर संयुग्मी है। अर्थात् $\bar{x}_1=x_2$ और $\bar{x}_2=x_1$) है। इस प्रकार हम देखते हैं, कि वास्तविक गुणांको वाले द्विघातीय समीकरण के सम्मिश्र मूल संयुग्मी–युग्म (conjugate pair) होते हैं। तथापि यह नियम सम्मिश्र गुणांको वाले द्विघातीय समीकरणों की स्थिति में सत्य नहीं हो सकता है।

अतः निष्कर्ष निकलता है कि द्विघातीय समीकरण (1) के सदैव अधिकतम दो मूल होते हैं। ये मूल

(i) वास्तविक और असमान होते हैं, यदि $b^2 - 4ac > 0$

(ii) वास्तविक और समान होते हैं, यदि $b^2 - 4ac = 0$

(iii) सम्मिश्र संयुग्मी होते हैं, यदि $b^2 - 4ac < 0$

हम पुनः देखते हैं कि मूलों के योगफल और गुणनफल प्रत्येक स्थिति में क्रमशः $\frac{-b}{a}$ और $\frac{c}{a}$ होते हैं।

उदाहरण 1 निम्नांकित समीकरण को गुणनखण्ड–विधि से हल कीजिए।

$$x^2 + 1 = 0$$

हल ध्यान दें कि, $-i^2 = 1$, अतः दिया समीकरण

$$x^2 - i^2 = 0$$

या $(x - i)(x + i) = 0$

या $x = i,\ x = -i$

इस प्रकार $x = i$ और $x = -i$ ही अभीष्ट मूल हैं।

उदाहरण 2 निम्नांकित द्विघातीय समीकरणों को हल कीजिए।

(i) $x^2 - 5x + 6 = 0$

(ii) $x^2 - 5x + 7 = 0$

हल **(i)** दिया समीकरण

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

अतः $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$

इस प्रकार दिये समीकरण के दो वास्तविक और असमान मूल निम्नांकित हैं।

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2} = 3 \quad \text{और} \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2} = 2$$

(ii) दिया समीकरण

अतः $D = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 7 = -3 < 0$

इस प्रकार दिए समीकरण के दो संयुग्मी सम्मिश्र मूल हैं।

$$x_1 = \frac{5 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{और} \quad x_2 = \frac{5 - i\sqrt{3}}{2}$$

[क्योंकि $\sqrt{-3} = i\sqrt{3}$] .

7.2.1 सम्मिश्र गुणांकों वाले द्विघातीय समीकरण (Quadratic equation with complex coefficients)

जब दिये समीकरण $ax^2+bx+c=0, \quad a \neq 0,$ में a,b,c सम्मिश्र संख्याएं हों तो, चूँकि सम्मिश्र संख्याओं में क्रम का अभाव होता है, अतः हम इसके विविक्तकर $\mathrm{D}=b^2-4ac$ का चिह्न नहीं जान सकते हैं, तथापि ऐसे समीकरणों के सम्मिश्र मूल होते हैं, तथा ये दोनों समान होगें यदि $b^2-4ac=0$ हो और यदि $b^2-4ac \neq 0$ हो, तो दोनों मूल असमान होंगे। इस प्रकार दोनों मूल निम्नांकित हैं।

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{और} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

जहां b^2-4ac शून्य अथवा अशून्य सम्मिश्र संख्या है।

पुनः देखें कि उपर्युक्त दोनों स्थितियों में मूलों के योगफल और गुणनफल क्रमशः $\frac{-b}{a}$ और $\frac{c}{a}$ वही हैं जो वास्तविक गुणांकों वाले द्विघातीय समीकरण की स्थिति में थे।

ध्यान दीजिए कि सम्मिश्र गुणांकों वाले द्विघातीय समीकरण $i\,x^2+2x-i=0$ का विवक्तकर $b^2-4ac=0$, अतः इसके समान मूल $x_1=x_2=\frac{-2}{2i}=i$, हैं। (चूंकि $i^2=-1$).

[यहां मूलों का योगफल $=\frac{-2}{i}=2i$ और मूलों का गुणनफल $=\frac{-i}{i}=-1$]

पुनः सम्मिश्र गुणांको वाले द्विघातीय समीकरण $x^2+3\,i\,x+i=0$ का विवक्तकर $b^2-4ac=-9-4\,i(\neq 0)$ है। अतः इस समीकरण के असमान मूल निम्नांकित हैं:

$$x_1=\frac{-3\,i+\sqrt{-9-4\,i}}{2} \qquad \text{और} \qquad x_2=\frac{-3\,i-\sqrt{-9-4\,i}}{2}$$

देखिए, मूलों का योग $=\ 3i$ और मूलों का गुणनफल $=\ i$ है।

टिप्पणी : किसी भी घात (जैसे त्रिघात या चतुर्थ घात) के वास्तविक अथवा सम्मिश्र गुणांको वाले बहुपदीय समीकरणों को हल करने में सम्मिश्र राशियों की पद्धति उपयुक्त है। इस कथन की उपपत्ति इस पुस्तक के क्षेत्र के बाहर है।

उदाहरण 3 निम्नांकित द्विघात समीकरणों को हल कीजिए।

(i) $x^2-7\,i\,x-12=0$

(ii) $x^2-(3\sqrt{2}+2\,i)\,x+6\sqrt{2}\,i=0$

(iii) $2x^2+3\,i\,x+2=0$

हल (i) दिया समीकरण है

$$x^2 - 7ix - 12 = 0$$

या $$x^2 - 3ix - 4ix - 12 = 0$$

या $$(x-3i)(x-4i) = 0$$

अर्थात $$x = 3i,\ x = 4i$$

इस प्रकार $3i$ और $4i$, दिए गए समीकरण के मूल हैं।

(ii) इस स्थिति में

$$\begin{aligned} D &= [-(3\sqrt{2}+2i)]^2 - 4\times1\times6\sqrt{2}\,i \\ &= 18+12\sqrt{2}\,i-4-24\sqrt{2}\,i \\ &= (3\sqrt{2}-2i)^2 \end{aligned}$$

इसलिए दिए समीकरण के सम्मिश्र मूल निम्नांकित है।

$$x = \frac{(3\sqrt{2}+2i)+\sqrt{(3\sqrt{2}-2i)^2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}+2i+3\sqrt{2}-2i}{2} = 3\sqrt{2}$$

और

$$x = \frac{(3\sqrt{2}+2i)-(3\sqrt{2}-2i)}{2} = \frac{4i}{2} = 2i$$

(iii) इस स्थिति में

$$D = (3i)^2 - 4\times2\times2 = -25 < 0$$

इसलिए दिए गए समीकरण के सम्मिश्र मूल

$$x = \frac{-3i+\sqrt{-25}}{2\times2} = \frac{-3i+5i}{4} = \frac{i}{2}$$

और

$$x = \frac{-3i-\sqrt{-25}}{2\times2} = \frac{-3i-5i}{4} = -2i$$

प्रश्नावली 7.1

निम्नांकित समीकरणों को हल कीजिए।

1. $25x^2 - 30x + 9 = 0$
2. $2x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$
3. $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 2$
4. $2x^2 + 1 = 0$
5. $x^2 - 4x + 7 = 0$
6. $2x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0$
7. $x^2 + x + 1 = 0$
8. $x^2 + 2x + 2 = 0$
9. $25x^2 - 30x + 11 = 0$
10. $5x^2 - 6x + 2 = 0$
11. $3x^2 - 7x + 5 = 0$
12. $13x^2 - 7x + 1 = 0$
13. $9x^2 + 10x + 3 = 0$
14. $8x^2 + 9x + 3 = 0$
15. $17x^2 - 28x + 12 = 0$
16. $21x^2 + 9x + 1 = 0$
17. $17x^2 - 8x + 1 = 0$
18. $21x^2 - 29x + 11 = 0$
19. $21x^2 + 28x + 10 = 0$
20. $27x^2 + 10x + 1 = 0$
21. $x^2 - (3\sqrt{2} - 2i)x - 6\sqrt{2}\, i = 0$
22. $x^2 + 4ix - 4 = 0$

7.3 मूलों तथा गुणांकों में सम्बन्ध

द्विघातीय समीकरण $ax^2 + bx + c = 0,\quad a \neq 0$ पर विचार कीजिए, जहां a, b और c वास्तविक संख्याएं हैं।

मान लीजिए कि इस समीकरण के मूल α, β हैं।

अनुभागों 7.1 और 7.2 में वर्णित विवेचना के अनुसार हम पातें हैं, कि

(i) यदि $b^2 - 4ac > 0$, तब α, β निम्नांकित हैं :

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{और} \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(ii) यदि $b^2 - 4ac = 0$, तब α, β निम्नांकित हैं :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \beta\ .$$

(iii) यदि $b^2-4ac<0$, तब α, β निम्नांकित हैं :

$$\alpha=\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \quad \text{और} \quad \beta=\frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

देखिए कि प्रत्येक स्थिति में

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a} \quad \text{और} \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

यदि हम द्विघातीय समीकरण $ax^2+bx+c=0,\ \ a\neq 0$ के दोनों पक्षों में a से भाग दें, तो इसका रूप निम्नांकित होता है,

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

अब देखें यदि किसी द्विघात समीकरण में x^2 का गुणांक 1 हो तथा सभी पद केवल एक पक्ष में हों तो मूलों का योगफल x के गुणांक का ऋणात्मक (negative) और मूलों का गुणनफल अचर पद के बराबर होता है।

दूसरी ओर यदि α, β दो असमान संख्याएं हैं तो α, β को मूल रखने वाला द्विघातीय समीकरण निम्नांकित है,

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

अर्थात् $\quad x^2-(\alpha+\beta)\,x+\alpha\beta=0$.

इस प्रकार दिए दो मूलों को रखने वाला द्विघातीय समीकरण निम्नांकित है,

$$x^2-(\text{मूलों का योगफल})\,x+(\text{मूलों का गुणनफल})=0 .$$

अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करते हैं

उदाहरण 4 हल किए बिना समीकरण $3x^2-7x+2=0$ के मूलों का योगफल और गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल दिए समीकरण $3x^2-7x+2=0$ के दोनों पक्षों में 3 से भाग करने पर,

$$x^2-\left(\frac{7}{3}\right)x+\left(\frac{2}{3}\right)=0$$

अतः मूलों का योगफल $=-(x \text{ का गुणांक})=\frac{7}{3}$

और मूलों का गुणनफल = अचर पद = $\frac{2}{3}$

उदाहरण 5 वह समीकरण बनाइये, जिसके मूल हैं,

(i) 2, 3 (ii) $\frac{3+\sqrt{7}}{4}, \frac{3-\sqrt{7}}{4}$

हल (i) मूलों का योगफल $= 5$ और मूलों का गुणनफल $= 6$

इसलिए अभीष्ट समीकरण, $x^2 - 5x + 6 = 0$.

(ii) मूलों का योगफल $= \frac{3}{2}$, और मूलों का गुणनफल $= \frac{1}{8}$. अतः

$x^2 - \left(\frac{3}{2}\right)x + \frac{1}{8} = 0$ अभीष्ट समीकरण है।

या $8x^2 - 12x + 1 = 0$

टिप्पणी सम्मिश्र गुणांको वाले द्विघात समीकरण के मूलों और गुणांको में संबन्ध के लिए हम अनुभाग 7.2 को स्मरण करके देखते हैं, कि ऐसे समीकरण के मूलों के योगफल और गुणनफल के सूत्र वहीं हैं, जो वास्तविक गुणांक वाले द्विघातीय समीकरण की स्थिति में है। अतः निष्कर्ष यह निकलता है, कि

(i) यदि $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$ सम्मिश्र गुणांको वाला द्विघातीय समीकरण है, तो

मूलों का योगफल $= \frac{-b}{a}$

और मूलों का गुणनफल $= \frac{c}{a}$

(ii) यदि α, β सम्मिश्र संख्याएं हैं, तो α, β मूलों वाला द्विघातीय समीकरण निम्नांकित है :

$x^2 - (\alpha + \beta)x + (\alpha\beta) = 0.$

या $x^2 -$ (मूलों का योगफल) $x +$ (मूलों का गुणनफल) $= 0$.

उदाहरण 6 वह द्विघातीय समीकरण बनाइए जिसके मूल हैं,

(i) $3i, 4i$ (ii) $\frac{2-i\sqrt{3}}{2}, \frac{2+i\sqrt{3}}{2}$

हल (i) मूलों का योगफल $= 3i + 4i = 7i$

और मूलों का गुणनफल $= (3i) \times (4i) = -12$

अतः अभीष्ट समीकरण है, $x^2 - 7ix - 12 = 0$

(ii) मूलों का योगफल $= \frac{2-i\sqrt{3}}{2} + \frac{2+i\sqrt{3}}{2} = 2$

और मूलों का गुणनफल $= \left(\frac{2-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2+i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4+3}{4} = \frac{7}{4}$.

अतः अभीष्ट समीकरण है,

$$x^2 - 2x + \frac{7}{4} = 0$$

या $\quad 4x^2 - 8x + 7 = 0$

उदाहरण 7 दिए गए द्विघातीय समीकरण

$$(k-2)\,x^2 + (k-5)\,x - 5 = 0,\ k \neq 2$$

में k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि

(i) समीकरण का एक मूल 2 है।

(ii) मूलों का योगफल 3 है।

(iii) मूलों का गुणनफल -4 है।

(iv) दोनों मूल समान हैं।

(v) मूल संख्यात्मक दृष्टि से समान परन्तु विपरीत चिह्नों के हों।

हल (i) चूंकि 2 दिए समीकरण का एक मूल है, अतः यह उसे अवश्य संतुष्ट करेगा। इसलिए

$$(k-2)(2^2) + (k-5)(2) - 5 = 0$$

या $\quad 4k - 8 + 2k - 10 - 5 = 0$

या $\quad 6k - 23 = 0$

या $\quad k = \frac{23}{6}$

(ii) दिए समीकरण के मूलों का योगफल $= \frac{-(k-5)}{k-2}$. परन्तु प्रश्नानुसार यह 3 है।

अतः $\quad \frac{-(k-5)}{k-2} = 3$

या $\quad -k + 5 = 3k - 6$

या $\quad k = \frac{11}{4}$

(iii) दिए समीकरण के मूलों का गुणनफल $= \frac{-5}{k-2}$

परन्तु प्रश्नानुसार यह -4 है।

अतः $\frac{-5}{k-2} = -4$

या $k = \frac{13}{4}$

(iv) चूंकि दिए समीकरण के मूल समान हैं अतः समीकरण का विविक्तकर $= 0$। अतः

$(k-5)^2 - 4 \times (-5)(k-2) = 0$

या $k^2 - 10k + 25 + 20k - 40 = 0$

या $k^2 + 10k - 15 = 0$

$k = -5 + 2\sqrt{10}$ या $k = -5 - 2\sqrt{10}$

(v) प्रश्नानुसार समीकरण के मूल संख्यात्मक दृष्टि से समान परन्तु विपरीत चिह्नों के हैं। अतः मान लीजिए कि मूल α और $-\alpha$ हैं। इससे मूलों का योगफल $= 0$

मूलों का योगफल $= \frac{-(k-5)}{k-2}$। इसलिए $\frac{k-5}{k-2} = 0$

अर्थात् $k = 5$ अभीष्ट मान है।

प्रश्नावली 7.2

1. हल किए बिना निम्नांकित प्रत्येक समीकरण के मूलों का योगफल और गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $(3k-1)x^2 - mx + (a-b) = 0,\ k \neq \frac{1}{3}$

(iii) $x + \frac{1}{x} = 7$ (iv) $\frac{k}{x} = \frac{x}{k} + 1;\ k,\ x \neq 0$

2. उस समीकरण को बनाइये जिसके मूल हैं:

(i) $\frac{3-\sqrt{2}}{2},\ \frac{3+\sqrt{2}}{2}$ (ii) $7i,\ 2i$

(iii) $\frac{i}{4},\ \frac{-i}{4}$ (iv) $3-4i,\ 2+3i$

(v) $\frac{3+i}{2},\ 3i$ (vi) $3-i,\ -1+2$

3. k का वह मान ज्ञात कीजिए ताकि समीकरण $2x^2 - 16x + k = 0$ का एक मूल दूसरे मूल का दूना हो।

4. m का वह मान ज्ञात कीजिए ताकि समीकरण $x^2+(2m+1)x+m^2+2=0$ का एक मूल दूसरे मूल का दूना हो।

5. समीकरण $(k-1)x^2=kx-1$ के लिए k का मान ज्ञात कीजिए ताकि
   (i) एक मूल -3 है।
   (ii) मूलों का योगफल 2 है।
   (iii) मूलों का गुणनफल -3 है।
   (iv) दोनों मूल समान हैं।
   (v) दोनों मूल संख्यात्मक दृष्टि से समान परन्तु विपरीत चिह्नों के हैं।

6. k का वह मान ज्ञात कीजिए ताकि समीकरण $k(x-1)^2=5x-7$ का एक मूल दूसरे मूल का दूना हो।

7. k के किस मान के लिए समीकरण $2x^2+3x+k=0$ के मूल समान हैं।

8. सिद्ध कीजिए कि समीकरण $ax^2+bx+a=0$ के मूल परस्पर व्युत्क्रम (reciprocal) हैं।

9. k के किस मान के लिए द्विघातीय समीकरण $x^2-4x+k=0$ के मूलों का अन्तर 2 है।

10. k के किस मान के लिए द्विघातीय समीकरण $2kx^2-20x+21=0$ का एक मूल दूसरे मूल से 2 अधिक है।

11. वह समीकरण बनाइए, जिसके मूल समीकरण $x^2-3x+2=0$ के मूलों से 2 अधिक हो।

12. वह समीकरण बनाइए जिसके मूल समीकरण $x^2+px+2q=0$ के मूलों के n गुने हों।

7.4 मूलों के सममित फलन (Symmetric Functions of Roots)

α और β से युक्त कोई बीजीय पद $f(\alpha,\beta)$ को सममित कहा जाता है, यदि α और β को परस्पर परिवर्तन कर देने पर वह अपरिवर्तित रहता है, [अर्थात् यदि $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$].

α और β के कुछ सममित फलन

$$\alpha^2+\beta^2 \;;\; \alpha^3+\beta^3 \;;\; \alpha\beta \;;\; \alpha^2\beta^2 \;;\; \alpha^2+\beta^2+\alpha\beta \;;\; \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta} \;;$$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} \;;\; \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2} \;;\; \alpha^2\beta+\alpha\beta^2$$ इत्यादि हैं।

बीजीय पद $f(\alpha,\beta)=\alpha^2-\beta$ सममित नही है। क्योंकि $f(\beta,\alpha)=\beta^2-\alpha\neq\alpha^2-\beta=f(\alpha,\beta)$.

α और β के सभी सममित फलन दो सममित फलनों $\alpha+\beta$ और $\alpha\beta$ के पदों में व्यक्त किए जा सकते हैं। उदाहरणतः

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

इस प्रकार हम देखते हैं, कि द्विघातीय समीकरण $ax^2+bx+c=0,\quad a\neq 0$ को बिना हल किए ही,

(a) हम प्रत्येक सममित फलन, जो समीकरण के मूलों से सम्बन्धित हैं, का मान उसके गुणांको के पद में ज्ञात कर सकते हैं।

(b) हम उन द्विघात समीकरणों को बना सकते हैं, जिनके मूल निम्नांकित संख्या–युग्म (pairs of numbers) में से कोई एक हो,

$$\alpha^2,\beta^2\ ;\ \alpha^3,\beta^3\ ;\ \alpha^2\beta,\ \beta^2\alpha\ ;\ \frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}\ ;\ \frac{1}{\alpha^2},\frac{1}{\beta^2}$$

इत्यादि, जहां α, β दिए द्विघात समीकरण के मूल हैं।

उदाहरण 8 यदि समीकरण $2x^2+3x+7=0$, के मूल α, β हों तब निम्नांकित के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\alpha^2+\beta^2$ (ii) $\alpha^3+\beta^3$ (iii) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ (iv) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$.

हल चूंकि α, β समीकरण $2x^2+3x+7=0$ के मूल हैं। अतः

$$\alpha+\beta=\frac{-3}{2} \quad \text{और} \quad \alpha\beta=\frac{7}{2}$$

इसलिए

(i) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$$=\left(\frac{-3}{2}\right)^2-2\times\frac{7}{2}=\frac{-19}{4}.$$

(ii) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$$=\left(\frac{-3}{2}\right)^3-3\times\frac{7}{2}\left(\frac{-3}{2}\right)=\frac{99}{8}$$

(iii) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$= \frac{-3}{2}\times\frac{2}{7} = \frac{-3}{7}$

(iv) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2} = \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$

$= \frac{\left(\frac{-3}{2}\right)^2-2\times\frac{7}{2}}{\left(\frac{7}{2}\right)^2} = \frac{-19}{49}$

उदाहरण 9 यदि α, β समीकरण $px^2+qx+r=0,\ p\neq 0$ के मूल हैं तो वह द्विघातीय समीकरण बनाइए जिसके मूल,

(i) $2\alpha, 2\beta$ (ii) α^2, β^2 (iii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ (iv) $\alpha^2\beta, \alpha\beta^2$ हैं।

हल चूंकि α, β दिए गए समीकरण के मूल हैं,

अतः $\alpha+\beta=\frac{-q}{p}$ और $\alpha\beta=\frac{r}{p}$.

माना अभीष्ट समीकरण के मूल α', β' हैं, तब

(i) $\alpha'+\beta' = 2\alpha+2\beta = 2(\alpha+\beta) = \frac{-2q}{p}$

और $\alpha'+\beta' = (2\alpha)(2\beta) = 4\alpha\beta = \frac{4r}{p}$.

वह समीकरण जिसके मूल α', β' हों, $x^2-(\alpha'+\beta')x+(\alpha'\beta')=0$ है। अतः अभीष्ट समीकरण

$$x^2-\frac{(-2q)}{p}x+\frac{4r}{p}=0$$

या $px^2+2qx+4r=0$

(ii) $\alpha'+\beta'=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta^2)-2\alpha\beta=\frac{q^2}{p^2}-\frac{2r}{p}=\frac{q^2-2pr}{p^2}$

$\alpha'\beta'=\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=\frac{r^2}{p^2}$

अतः $x^2 - \frac{(q^2 - 2pr)}{p^2}x + \frac{r^2}{p^2}$ अभीष्ट समीकरण है,

या $p^2x^2 - (q^2 - 2pr)x = r^2 = 0$

(iii) इस स्थिति में

$$\alpha' + \beta' = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-q}{r}$$

$$\alpha'\beta' = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{p}{r}$$

अतः $x^2 - \left(\frac{-q}{r}\right)x + \frac{p}{r} = 0$ अभीष्ट समीकरण है,

या $r\,x^2 + q\,x + p = 0$

(iv) इस स्थिति में

$$\alpha' + \beta' = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{-qr}{p^2}$$

पुनः $\alpha'\beta' = (\alpha^2\beta)(\alpha\beta^2) = (\alpha\beta)^3 = \frac{r^3}{p^3}$

इसलिए $x^2 - \left(\frac{-qr}{p^2}\right)x + \frac{r^3}{p^3} = 0$ अभीष्ट समीकरण है,

या $p^3x^2 + pqrx + r^3 = 0$

प्रश्नावली 7.3

1. यदि α, β समीकरण $3x^2 - 5x - 8 = 0$ के मूल हों, तो निम्नांकित का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\alpha^2 + \beta^2$ (ii) $\alpha^3 + \beta^3$ (iii) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ (iv) $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ (v) $\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2$.

2. यदि α, β समीकरण $x^2 + 3x + 6 = 0$ के मूल हों तो निम्नांकित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ (ii) $\alpha^2 + \beta^2$

3. यदि α, β द्विघातीय समीकरण $x^2 + px + q = 0$ के मूल हों तो निम्नांकित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\alpha^4 + \beta^4$ (ii) $\alpha^3 + \beta^3$.

4. यदि α, β समीकरण $x^2 - qx + r = 0$ के मूल हों तो निम्नांकित के मान ज्ञात कीजिए :

   (i) $\alpha^{-2} + \beta^{-2}$ (ii) $\alpha^{-3} + \beta^{-3}$.

5. यदि $\alpha + \beta = 1$ और यदि $\alpha^2 + \beta^2 = 2$, तो निम्नांकित के मान ज्ञात कीजिए :

   (i) $\alpha^3 + \beta^3$ (ii) $\alpha^4 + \beta^4$.

6. यदि α, β समीकरण $3x^2 - 4x + 1 = 0$, के मूल हैं, तो वे समीकरण बनाइए, जिनके मूल निम्न है :

   (i) $3\alpha, 3\beta$ (ii) α^2, β^2 (iii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

7. यदि $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α, β हैं, तो वह समीकरण बनाइए जिनके मूल निम्न हैं :

   (i) $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ (ii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

8. यदि समीकरण $x^2 + px + q = 0$ के मूल α, β हैं, तो वह समीकरण बनाइए जिनके मूल

   (i) α^2, β^2 (ii) $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ हैं।

9. यदि $x^2 - 2x + 3 = 0$ के मूल α, β हैं, तो वह द्विघातीय समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसके मूल $\alpha + 2, \beta + 2$ हैं।

10. यदि समीकरण $2x^2 - 5x + 7 = 0$ के मूल α, β हैं, तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसके मूल $2\alpha + 3\beta, 3\alpha + 2\beta$ हैं।

11. वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल समीकरण $x^2 - px + q = 0$ के मूलों के व्युत्क्रम हैं।

12. यदि किसी द्विघात समीकरण के मूलों का योगफल 3, तथा उनके घनों का योगफल 63 है, तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए।

13. यदि α, β समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हैं, तो निम्नांकित का मान ज्ञात कीजिए :

   (i) $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$. (ii) $\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2$

14. यदि α, β समीकरण $px^2 + q = 0$ के मूल हैं, तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\alpha + \frac{1}{\beta}$ और $\beta + \frac{1}{\alpha}$ हैं।

15. यदि α, β समीकरण $px^2 + qx + r = 0$ के मूल हैं, तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ और $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ हैं।

7.5 द्विघातीय रूप में परिवर्तित किए जा सकने वाले समीकरण (Equations Reducible to Quadratic Form)

इस अनुभाग में ऐसे समीकरणों को हल करेगें जो द्विघातीय नहीं हैं, परन्तु द्विघातीय समीकरण के रूप में परिवर्तित किए जा सकते हैं।

निम्नांकित उदाहरणों का अध्ययन कीजिए

उदाहरण 10 निम्नांकित समीकरण को हल कीजिए

$$\sqrt{x} = x - 2$$

हल समीकरण के दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, समीकरण का परिवर्तित रूप है,

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

या $(x-1)(x-4) = 0$

ध्यान दें, $x = 4$ मौलिक समीकरण $\sqrt{x} = x - 2$ को संतुष्ट करता है, परन्तु $x = 1$ इस समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है।

अतः दिए गए समीकरण $\sqrt{x} = x - 2$ का केवल एक मूल $x = 4$ है

टिप्पणी यदि हम किसी समीकरण के दोनों पक्षों को वर्ग करते हैं, तो हम एक नया समीकरण पाते हैं, जो मौलिक के समतुल्य नहीं होता है। वस्तुतः समीकरण $x = 3$ का केवल एक मूल अर्थात 3 है, परन्तु समीकरण $x^2 = 9$, जो $x = 3$ के दोनों पक्षों को वर्ग करने से प्राप्त होता है, के दो मूल 3 और –3 हैं। –3 को समीकरण $x - 3 = 0$ का बाह्रय मूल (Extraneous root) कहा जाता है। उपर्युक्त उदाहरण 10 में दिए गए समीकरण का बाह्य मूल $x = 1$ है।

उदाहरण 11 $x^4 + x^2 - 12 = 0$ को हल कीजिए।

हल दिया समीकरण द्विघातीय नहीं है, यदि $x^2 = y$ प्रतिस्थापित करें, तो दिए समीकरण का परिवर्तित रूप,

$y^2 + y - 12 = 0$ है जो कि एक द्विघातीय समीकरण है।

अतः $(y-3)(y+4) = 0$

अर्थात् $y = 3$ या $y = -4$

अब यदि $y = 3$, तो $x^2 = 3$

अतः $x = \pm\sqrt{3}$

पुनः यदि $y = -4$ तो $x^2 = -4$.

अतः $x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

अतः $x = \pm\sqrt{3}$ और $x = \pm 2i$

उदाहरण 12 $(x^2-5x^2)-30(x^2-5x)-216=0$ को हल कीजिए।

हल यह समीकरण द्विघातीय नहीं हैं, परन्तु चतुर्थ घातीय है। यदि $x^2-5x=y$ प्रतिस्थापित कर दिया जाय, तो दिए समीकरण का परिवर्तित रूप, $y^2-30y-216=0$ एक द्विघातीय समीकरण है।

बायें पक्ष का गुणनखंडन करने पर हम पाते हैं,

$$(y+6)(y-36)=0$$

अर्थात् $y=-6$ या $y=36$

यदि $y=-6$

तो $x^2-5x=-6$

या $x^2-5x+6=0$

या $(x-2)(x-3)=0$

अर्थात् $x=2$ या $x=3$

पुनः यदि $y=36$ तो

$$x^2-5x=36$$

या $x^2-5x-36=0$

या $(x-9)(x+4)=0$

अतः $x=9$ या $x=-4$

अतः दिए समीकरण के अभीष्ट मूल $x=2, x=3, x=-4$ और $x=9$ हैं।

उदाहरण 13 $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=7$ को हल कीजिए।

हल दिया समीकरण द्विघातीय नहीं है, बल्कि चतुर्थ घातीय है। इसे निम्नांकित रूप में लिख सकते हैं।

$$(x^2-5x+7)^2-(x^2-5x+6)-1=7-1$$

या $$(x^2-5x+7)^2-(x^2-5x+7)=6$$

अब $x^2-5x+7=y$, रखने पर दिए समीकरण का परिवर्तित रूप है।

$$y^2-y-6=0$$

यह y में द्विघातीय समीकरण है। जिसका गुणनखंड है

$$(y-3)(y+2)=0$$

इस प्रकार $y=3$ या $y=-2$

यदि $y=3$ तो

$$x^2-5x+7=3$$

या $x^2-5x+4=0$

या $(x-1)(x-4)=0$

इसलिए $x=1$ या $x=4$

पुनः यदि $y=-2$

तो $x^2-5x+7=-2$

या $x^2-5x+9=0$

अतः $x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-36}}{2}=\dfrac{5\pm i\sqrt{11}}{2}$

इस प्रकार अभीष्ट मूल $x=1, x=4,\ x=\dfrac{5+i\sqrt{11}}{2}$ और $x=\dfrac{5-i\sqrt{11}}{2}$ हैं।

उदाहरण 14 $x(x+2)(x^2-1)=-1$ को हल कीजिए।

हल दिए समीकरण को निम्नांकित रूप में लिख सकते हैं।

$$x(x+2)(x-1)(x+1)=-1$$

या $x(x+1)(x+2)(x-1)=-1$

या $(x^2+x)(x^2+x-2)=-1$

अब $x^2+x=y$

रखने पर दिए समीकरण का परिवर्तित रूप

$$y(y-2)=-1$$

या $y^2-2y+1=0$

या $(y-1)^2=0$

इसके $y=1$ दो समान मूल हैं।

अतः $x^2 + x = 1$

या $x^2 + x - 1 = 0$

अतः $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ और $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

चूंकि $y = 1$ दो बार आया हुआ मूल है, $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ और $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ दिए समीकरण के दोहरे पुनरावृत (repeated) मूल हैं।

उदाहरण 15 हल कीजिए $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$, $x \neq 0$

हल मान लीजिए $x + \frac{1}{x} = y$, तो उपर्युक्त समीकरण का परिवर्तित रूप

$y^2 + y - 6 = 0$ है,

या $(y+3)(y-2) = 0$

जिससे $y = -3$ या $y = 2$ प्राप्त होते हैं।

यदि $y = -3$, तो

$$x + \frac{1}{x} = -3$$

या $\frac{x^2+1}{x} = -3$

या $x^2 + 3x + 1 = 0$

इससे $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ प्राप्त होता है।

पुनः यदि $y = 2$, तो

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

जिसे सरल करने पर $x^2 - 2x + 1 = 0$ प्राप्त होता है,

या $(x-1)^2 = 0$

जिससे $x = 1, 1$ मिलते हैं। इस प्रकार दिए समीकरण के हल

$x = 1,\ 1$ और $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ हैं।

उदाहरण 16 हल कीजिए

$$12x^4 - 56x^3 + 89x^2 - 56x + 12 = 0$$

हल x^2 से दोनों पक्षों को भाग करने पर हम पाते हैं कि

$$12x^2 - 56x + 89 - \frac{56}{x} + \frac{12}{x^2} = 0$$

या $$12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 56\left(x + \frac{1}{x}\right) + 89 = 0$$

या $$12\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right] - 56\left(x + \frac{1}{x}\right) + 89 = 0$$

मान लीजिए $x + \frac{1}{x} = y$, तो उपर्युक्त समीकरण का परिवर्तित रूप,

$$12(y^2 - 2) - 56y + 89 = 0$$

या $12y^2 - 56y + 65 = 0$ है।

यह द्विघातीय समीकरण है। इसका गुणनखण्डन करने पर $(6y - 13)(2y - 5) = 0$ प्राप्त होता है।

इससे $y = \frac{13}{6}$ या $y = \frac{5}{2}$ प्राप्त होता है।

यदि $y = \frac{13}{6}$, तो $x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$

या $$\frac{x^2 + 1}{x} = \frac{13}{6}$$

या $6x^2 - 13x + 6 = 0$

या $(3x - 2)(2x - 3) = 0$.

जिससे $x = \frac{2}{3}$ या $x = \frac{3}{2}$ प्राप्त होता है।

पुनः यदि $y = \frac{5}{2}$, तो $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

जो सरल करने पर $2x^2 - 5x + 2 = 0$ के रूप में मिलता है।

या $(x - 2)(2x - 1) = 0$

जिससे $x = 2$ या $x = \frac{1}{2}$ प्राप्त हुआ।

इस प्रकार दिए समीकरण के हल $x = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$ और 2 हैं।

उदाहरण 17 $4^x - 5.2^x + 4 = 0$ को हल कीजिए।

हल दिया समीकरण निम्नांकित रूप में पुनः लिखा जा सकता है,

$$(2^x)^2 - 5.2^x + 4 = 0$$

$2^x = y$, रखने पर हम पाते हैं, कि

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

अतः $(y-4)(y-1) = 0$

इसलिए $y = 4$ या $y = 1$

यदि $y = 4$,

तो $2^x = 4$

या $2^x = 2^2$

इसलिए $x = 2$

पुनः यदि $y = 1$ तो $2^x = 1$

या $2^x = 2^0$

इसलिए $x = 0$

इस प्रकार दिए समीकरण के हल $x = 0, 2$ हैं।

प्रश्नावली 7.4

निम्न समीकरणों को हल कीजिए :

1. $x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$
2. $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$
3. $(x^2 - 3x)^2 - 5(x^2 - 3x) + 6 = 0$
4. $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0$
5. $(x^2 - 3x + 3)^2 - (x-1)(x-2) = 7$
6. $4^x - 3.2^{x+2} + 32 = 0$
7. $7^{x+1} + 7^{1-x} = 50$
8. $4^{x+1} - 6^x - 2.9^{x+1} = 0$

9. $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$

10. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1=0$

11. $\frac{x+3}{x+2} + \frac{x-3}{x-2} = \frac{2x-3}{x-1}$

12. $\sqrt{\frac{x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{13}{6}$

13. $\frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} = 3$

14. $\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \frac{a}{x}$

15. $\sqrt{x+5} + \sqrt{x+21} = \sqrt{6x+40}$

16. $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3$

17. $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-5}{x-6} - \frac{x-6}{x-7}$

18. $4x^4 - 16x^3 + 7x^2 + 16x + 4 = 0$

7.6 अनुप्रयोग (Applications)

इस अनुभाग में हम द्विघातीय समीकरणों जिनकों इस अध्याय के अन्य अनुभागों में अध्ययन किए हैं, का प्रयोग कुछ विशिष्ट प्रश्नों के हल करने में करेंगे।

उदाहरण 18 निम्नांकित का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots}}}$

(ii) $20+\cfrac{1}{20+\cfrac{1}{20+\ldots}}$

हल (i) मान लीजिये कि, $x = \sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots}}}$

या $x = \sqrt{20+x}$

वर्ग करने पर हम पाते हैं, कि

$$x^2 = 20 + x$$

या $x^2 - x - 20 = 0$

इस प्रकार $x = \frac{1+\sqrt{1+80}}{2} = 5$ या $x = \frac{1-\sqrt{1+80}}{2} = -4$

क्योंकि x धनात्मक है, अतः ऋणात्मक मान की उपेक्षा करने पर अभीष्ट मान 5 है।

(ii) मान लीजिए कि $$x = 20 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{20 + \ldots}}$$

या $$x = 20 + \frac{1}{x}$$

अतः $$x^2 - 20x - 1 = 0$$

इससे $$x = \frac{20 + \sqrt{404}}{2} = 10 + \sqrt{101}$$

या $$x = \frac{20 - \sqrt{404}}{2} = 10 - \sqrt{101}$$ प्राप्त होते हैं।

क्योंकि अभीष्ट मान ऋणात्मक नहीं हो सकता है, अतः $10 - \sqrt{101}$ उपेक्षणीय है। इस प्रकार अभीष्ट मान $10 + \sqrt{101}$ है।

उदाहरण 19 यदि समीकरण $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ के मूल α, β इस प्रकार है, कि $\alpha^2 + \beta^2 = 1.75$, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल चूंकि α, β समीकरण $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ के मूल हैं।

अतः $\alpha + \beta = 3a$ और $\alpha\beta = a^2$

चूंकि $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9a^2 - 2a^2 = 7a^2$

प्रश्नानुसार $\alpha^2 + \beta^2 = 1.75$

अतः $7a^2 = 1.75$

इसलिए $a = \pm 0.5$

उदाहरण 20 दो अंक की एक संख्या अपने अंको के योगफल की चार गुनी, और अंको के गुणनफल की तीन गुनी है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि संख्या के दहाई स्थान का अंक x तथा y इकाई स्थान का अंक है।

अतः संख्या $= (10x + y)$

प्रश्नानुसार $10x + y = 4(x + y)$

और $10x + y = 3xy$

इनमें से पहली समीकरण से प्राप्त होता है।

$$6x = 3y \quad \text{या} \quad 2x = y$$

$10x + y = 3xy$ में $2x = y$ प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं, कि

$$10x + 2x = 6x^2$$

या $$x^2 - 2x = 0$$

जिससे $x = 0$ या $x = 2$

यदि $x = 0$ तो $y = 0$ और इस प्रकार संख्या इस स्थिति में दो अंकीय नहीं है।

अतः $x = 2,\ y = 4$ ही उपयुक्त हल है।

इस प्रकार अभीष्ट संख्या = 24

उदाहरण 21 उस संख्या को ज्ञात कीजिए, जो अपने धनात्मक वर्गमूल से 20 बड़ी है।

हल मान लीजिए कि अभीष्ट संख्या x है। अतः कल्पना के अनुसार

$$x - \sqrt{x} = 20$$

या $$(x - 20)^2 = x$$

या $$x^2 - 41x + 400 = 0$$

या $$(x - 25)(x - 16) = 0$$

इस प्रकार $x = 25$ या $x = 16$

लेकिन $x = 16$, दिए गए समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है, अतः अभीष्ट संख्या 25 है।

उदाहरण 22 निम्नांकित समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$$(x + y)^2 - 2(x + y) = 15 \qquad (1)$$

$$xy = 6 \qquad (2)$$

हल $x + y = z$ समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$z^2 - 2z - 15 = 0$$

या $$(z - 5)(z + 3) = 0$$

इस प्रकार $z = 5$ या $z = -3$.

अतः हम समीकरणों के दो निकाय (system) पाते हैं।

$$x + y = 5, \quad xy = 6 \qquad (3)$$

$$x + y = -3, \quad xy = 6 \qquad (4)$$

निकाय (3) में y का विलोपन करने पर

$$x(5-x)=6$$

या $$x^2-5x+6=0$$

इस प्रकार $x=3$ या $x=2$

पुनः यदि $x=3$ तब $y=2$ और यदि $x=2$ तब $y=3$

इस प्रकार $x=3,\ y=2;\ x=2,\ y=3$ समीकरणों के हल हैं।

इसी प्रकार समीकरण (4) से हम पाते हैं, कि

$$x=\frac{-3+i\sqrt{15}}{2},\quad y=\frac{-3-i\sqrt{15}}{2} \quad \text{तथा} \quad x=\frac{-3-i\sqrt{15}}{2},\ y=\frac{-3+i\sqrt{15}}{2}$$

अभीष्ट हल हैं।

उदाहरण 23 एक तरण–ताल में लगातार एक समान प्रवाह वाले तीन पाइप लगे हैं। प्रथम दो नल साथ–साथ खुले रहने पर ताल को उतने समय में भरते हैं, जितने समय में तीसरा नल उसे अकेले भर देता है। दूसरा नल ताल को पहले नल की अपेक्षा 5 घण्टे पूर्व, और तीसरे नल से 4 घण्टे बाद भरता है। तीनों नल अकेले अकेले कितने समय में ताल को भरते हैं?

हल मान लीजिए V ताल का आयतन तथा दूसरे नल द्वारा ताल को भरने में अकेले x घण्टे लगते हैं। अतः प्रश्नानुसार प्रथम नल को ताल के भरने में $(x+5)$ घण्टे, और तीसरे नल को ताल भरने में $(x-4)$ घण्टे लगते हैं।

इस प्रकार पहले, दूसरे और तीसरे नलों द्वारा 1 घण्टा में भरे ताल के भाग क्रमशः

$$\frac{V}{x+5},\ \frac{V}{x} \ \text{और} \ \frac{V}{x-4} \ \text{हैं।}$$

अतः प्रश्नानुसार $$\frac{V}{x+5}+\frac{V}{x}=\frac{V}{x-4}$$

चूंकि $V\neq 0$ अतः V से भाग करने पर,

$$\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x-4}$$

या $$x^2-8x-20=0$$

या $$(x-10)(x+2)=0$$

इस प्रकार $x=10$ या $x=-2$, लेकिन x समय (घंटो में) होने के कारण ऋणात्मक नही हो सकता है।

अतः $$x=10$$

इसलिये, नलों द्वारा ताल को भरने में लगे अलग–अलग समय क्रमशः 15 घण्टे, 10 घण्टे, 6 घण्टे हैं।

उदाहरण 24 प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए ताकि समीकरणों $x^2+ax+b=0$ और $x^2+bx+a=0$ के एक मूल उभयनिष्ठ हों।

हल मान लीजिए कि α इन समीकरणों का उभयनिष्ठ मूल है।

अतः $\alpha^2+a\alpha+b=0$

और $\alpha^2+b\alpha+a=0$

अब तिर्यक गुणन–विधि द्वारा

$$\frac{\alpha^2}{a^2-b^2}=\frac{\alpha}{b-a}=\frac{1}{b-a}$$

उपर्युक्त से $\alpha^2=\frac{a^2-b^2}{b-a}=-(a+b)$ और $\alpha=1$

α का विलोपन करने पर

$$(a+b)=-1$$

या $a+b+1=0$

जो कि वांछित प्रतिबन्ध है।

उदाहरण 25 यदि समीकरणों $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ और $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ का एक मूल उभयनिष्ठ हो, तो उसे ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि α इन समीकरणों का उभयनिष्ठ मूल है।

अतः $a_1\alpha^2+b_1\alpha+c_1=0$

एवं $a_2\alpha^2+b_2\alpha+c_2=0$.

अब तिर्यक गुणन–विधि द्वारा हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{\alpha^2}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{\alpha}{a_2c_1-a_1c_2}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

इस प्रकार $\alpha^2=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$ और $\alpha=\frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$

अतः $$\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\left(\frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}\right)^2$$

या $$\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2c_1 - a_1c_2} = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

अतः $$\alpha = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{या} \quad \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2c_1 - a_1c_2}$$

प्रश्नावली 7.5

1. $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

2. $2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. $2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\ldots}}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. $\sqrt{8-\sqrt{8-\sqrt{8-\ldots}}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. वह संख्या ज्ञात कीजिए जो अपने घन वर्गमूल से 12 अधिक है।

6. हल कीजिए, $x^3 + y^3 = 4914$, $x + y = 18$

7. हल कीजिए, $x^4 + y^4 = 82$, $x + y = 4$

8. हल कीजिए, $x^4 + y^4 = 257$, $x + y = 5$

9. कपड़े के एक टुकड़े का मूल्य 35 रुपये हैं। यदि इसकी लम्बाई 4 मीटर अधिक और प्रति मीटर का मूल्य 1 रुपया कम होता है, तो उसका मूल्य अपरिवर्तित रहता है। कपड़े की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

10. एक कम्पनी अपना उत्पादन प्रतिवर्ष समान प्रतिशत की दर से बढ़ाना चालू रखती है। वह प्रतिशतता ज्ञात कीजिए, जिससे दो वर्षों में उत्पादन दो गुना हो जाता है।

विविध उदाहरण

उदाहरण 26 हल कीजिए :— $\sqrt{x^2+4x-21} + \sqrt{x^2-x-6} = \sqrt{6x^2-5x-39}$

हल हम जानते हैं, कि

$$x^2 + 4x - 21 = (x+7)(x-3)$$

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

और $$6x^2 - 5x - 39 = (x-3)(6x+13)$$

अतः दिया समीकरण

$$\sqrt{(x+7)(x-3)} + \sqrt{(x-3)(x+2)} = \sqrt{(x-3)(6x+13)}$$

या $$\sqrt{x-3}\left\{\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} - \sqrt{6x+13}\right\} = 0$$

जिससे $x = 3$ या $\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$

दोनों पक्षों को वर्ग करके सरल करने पर

$$\sqrt{(x+7)(x+2)} = 2(x+1)$$

पुनः दोनों पक्षों का वर्ग करके सरल करने पर

$$3x^2 - x - 10 = 0$$

या $$(x-2)(3x+5) = 0$$

जिससे $x = 2$ या $-\frac{5}{3}$ प्राप्त होते हैं।

अतः दिए समीकरण के सम्भव मूल 3, 2 और $-\frac{5}{3}$ हैं।

चूंकि $x = -\frac{5}{3}$ दिए समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है। (सत्यापन करें) इसलिए $x = -\frac{5}{3}$ इसका मूल नहीं है।

अतः 2 और 3 अभीष्ट मूल हैं।

उदाहरण 27 m के किस मान के लिए समीकरण

$(m+1)x^2 + 2(m+3)x + (2m+3) = 0$ के दोनों मूल समान होंगे, ज्ञात कीजिए।

हल दिए गए समीकरणों के दोनों मूल समान होते हैं यदि और केवल यदि

$$[2(m+3)]^2 = 4(m+1)(2m+3)$$

या $$m^2 - m - 6 = 0$$

या $$(m-3)(m+2) = 0$$

इस प्रकार m के अभीष्ट मान 3 या -2 हैं।

उदाहरण 28 दिखाइये कि समीकरण $(x-a)(x-b)=h^2$ के मूल वास्तविक हैं।

हल दिए समीकरण को हम निम्न रूप में लिख सकते है।

$$x^2-(a+b)x+ab-h^2=0$$

इसका विविक्तकर

$$D=(a+b)^2-4(ab-h^2)=(a+b)^2-4ab+4h^2$$

$$=(a-b)^2+4h^2$$

जो सैदव धनात्मक है।

अतः दिए समीकरण के मूल वास्तविक हैं।

उदाहरण 29 $x^2+\left(\dfrac{ax}{x+a}\right)^2=3a^2,\ x\neq -a$ को हल कीजिए।

हल सूत्र $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$ का प्रयोग करने पर दिया समीकरण

$$\left(x-\frac{ax}{x+a}\right)^2+2.x.\frac{ax}{x+a}=3a^2$$

या $$\left(\frac{x^2+ax-ax}{x+a}\right)^2+2a\left(\frac{x^2}{x+a}\right)=3a^2$$

या $$\left(\frac{x^2}{x+a}\right)^2+2a\left(\frac{x^2}{x+a}\right)=3a^2$$

अतः $\dfrac{x^2}{x+a}=y$ रखने पर दिए समीकरण का परिवर्तित रूप

$$y^2+2ay-3a^2=0$$

या $$(y+3a)(y-a)=0$$

जिससे प्राप्त होता है $y=a$ और $y=-3a$

यदि $y = a$, तब

$$\frac{x^2}{x+a}=a$$

या $$x^2-ax-a^2=0$$

अतः $$x=\frac{a+a\sqrt{5}}{2} \quad \text{या} \quad x=\frac{a-a\sqrt{5}}{2}$$

पुनः यदि $y=-3a$ तो

$$\frac{x^2}{x+a}=-3a$$

या $$x^2+3ax+3a^2=0$$

इस प्रकार $$x=\frac{-3a+ai\sqrt{3}}{2} \quad \text{या} \quad x=\frac{-3a-ai\sqrt{3}}{2}$$

इस प्रकार समीकरण के मूल $\frac{a}{2}(1+\sqrt{5})$, $\frac{a}{2}(1-\sqrt{5})$, $\frac{a}{2}(-3+i\sqrt{3})$ और $\frac{-a}{2}(3+i\sqrt{3})$ हैं।

उदाहरण 30 $\frac{x-p}{q}+\frac{x-q}{p}=\frac{q}{x-p}=\frac{p}{x-q}$ को हल कीजिए

हल दिए समीकरण को निम्नांकित रूप में लिख सकते हैं।

$$\frac{x-p}{q}-\frac{q}{x-p}=\frac{p}{x-q}-\frac{x-q}{p}$$

या $$\frac{(x-p)^2-q^2}{q(x-p)}=\frac{p^2-(x-q)^2}{p(x-q)}$$

या $$\frac{(x-p-q)(x-p+q)}{q(x-p)}=\frac{(p+x-q)(p-x+q)}{p(x-q)}$$

या $$\frac{(x-p-q)(x-p+q)}{q(x-p)}=-\frac{(p+x-q)(p-x-q)}{p(x-q)}$$

या $$(x-p-q)\left(\frac{(x-p+q)}{q(x-p)}-\frac{(p+x-q)}{p(x-q)}\right)=0$$

अतः $$x-p-q=0 \text{ अथवा } x=p+q$$

या $$\frac{(x-p+q)}{q(x-p)}=-\frac{(p+x-q)}{p(x-q)}$$

या $\qquad (p+q)x^2-(p^2+q^2)x=0$

इससे $x=0$ या $\dfrac{p^2+q^2}{p+q}$ प्राप्त होते हैं।

अतः $x=0,\ \dfrac{p^2+q^2}{p+q}$ या $p+q$ अभीष्ट हल हैं।

उदाहरण 31 $4x-3y=1$ और $12xy+13x^2=25$ को हल कीजिए।

हल समीकरण $4x-3y=1$ से, $y=\dfrac{4x-1}{3}$

y के इस मान को समीकरण $12xy+13x^2=25$ में प्रतिस्थापित करने पर,

$$12x\left(\frac{4x-1}{3}\right)+13x^2=25$$

या $\qquad 29x^2-4x-25=0$

या $\qquad (29x+25)\,(x-1)=0$

अतः $\qquad x=1$ या $-\dfrac{25}{29}$

यदि $x=1$ तो $y=1$ पुनः यदि $x=-\dfrac{25}{29}$ तो $y=-\dfrac{43}{29}$

अतः अभीष्ट हल $x=1,\ y=1;\ x=-\dfrac{25}{29},\ y=-\dfrac{43}{29}$

उदाहरण 32 निम्नांकित समीकरण–निकाय को हल कीजिए।

$$x^4+y^4=82 \qquad (1)$$

$$x-y=2 \qquad (2)$$

हल $x=u+v$ और $y=u-v$, रखने पर $x-y=2v$ अतः (2) के अनुसार $v=1$

अब (1) को हम लिख सकते हैं, कि

$$(u+v)^4+(u-v)^4=82$$

या $\qquad (u+1)^4+(u-1)^4=82$

सरल करने पर हम पाते हैं कि

$$(u^4+4u^3+6u^2+4u+1)+(u^4-4u^3+6u^2-4u+1)=82$$

या $\quad 2(u^4+6u^2+1)=82$

या $\quad u^4+6u^2-40=0$

अब $\quad u^2=z$ रखने पर

$$z^2+6z-40=0$$

इससे $z=4$ या -10 मिलते हैं।

इस प्रकार $\quad u^2=4$ या -10

इसलिए $\quad u=\pm 2$ या $\pm i\sqrt{10}$

अतः $\quad x=3, -1, 1+i\sqrt{10}, 1-i\sqrt{10}$;

$$y=1, -3, -1+i\sqrt{10}, -1-i\sqrt{10}$$

अध्याय 7 पर विविध प्रश्नावली

1. यदि द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0$ के मूल $p:q$ के अनुपात में हों, तो सिद्ध कीजिए कि, $ac\,(p+q)^2=b^2pq$

2. यदि समीकरण $x^2-px+q=0$ के मूल α, β हों, तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\alpha\beta+\alpha+\beta$ और $\alpha\beta-\alpha-\beta$ हैं।

3. सिद्ध कीजिए कि द्विघात समीकरण $2x^2-x-\frac{3}{2}=0$ के मूल अपरिमेय हैं।

4. यदि a, b और c वास्तविक है, तब सिद्ध कीजिए कि $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$ यदि और केवल यदि $a=b=c$

5. सिद्ध कीजिए, कि समीकरण,

   $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$

   के मूल समान होंगे यदि और केवल यदि $a=b=c$

   [**संकेत :** प्रश्न 4 का प्रयोग करें।]

6. यदि समीकरण

$$\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{c}$$ के मूलों का योगफल शून्य है, तो

सिद्ध कीजिए कि इसके मूलों का गुणनफल $-\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ है।

7. यदि द्विघातीय समीकरण $a^2+bx+c=0$ का एक मूल दूसरे मूल का वर्ग हो, तो सिद्ध कीजिए कि $b^3+a^2c+ac^2=3abc$

8. यदि समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल α और β हैं, तो $\frac{1}{a\alpha+b}$ और $\frac{1}{a\beta+b}$ मूलों वाला समीकरण ज्ञात कीजिए।

9. सिद्ध कीजिए कि समीकरण, $x^2-2ax+a^2-b^2-c^2=0$ के मूल सदैव वास्तविक हैं।

10. m $(m \neq -1)$ के किस मान के लिए, समीकरण

$$\frac{x^2-bx}{ax-c}=\frac{m-1}{m+1}$$

के मूल परिमाण में समान परन्तु चिह्न में विपरीत होंगे?

11. वह समीकरण बनाइए, जिसके मूल समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूलों के एक तिहाई हों।

12. वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूलों के n गुना हैं।

13. यदि समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूलों का अनुपात r हो, तो सिद्ध कीजिए कि $(r+1)^2ac=b^2r$

14. p और q में सम्बन्ध ज्ञात कीजिए, यदि समीकरण $x^2+px+q=0$ का एक मूल दूसरे मूल का 37 गुना हो।

15. यदि किसी द्विघातीय समीकरण मे अचर पद शून्य हो, तो सिद्ध कीजिए कि उसका एक मूल शून्य होता है।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

वास्तव में द्विघातीय समीकरण की धारणा अत्यन्त पुरानी है। बेबिलोनिया के लोग 4000 वर्षो पूर्व से ही द्विघातीय समीकरण को जानते थे। ईसा से 1600 वर्षो पूर्व की चिकनी मिट्टी की पटिटकाएं, जिन्हें येल पटिटकाएं (Yale Tablets) कहते हैं, प्राप्त है, जिन पर द्विघातीय समीकरण पर आधारित अनेक असाधित (unsolved) प्रश्न अंकित हैं। प्रसिद्ध यूनानी गणितज्ञ युक्लिड (जन्म ईसा से 300 वर्ष पूर्व) ने ज्यामितीय प्रश्नों के हल करने में अनेक द्विघातीय समीकरण दिए हैं।

प्राचीन भारतीय गणितज्ञों का द्विघातीय समीकरण के क्षेत्र में योगदान महत्वपूर्ण तथा विस्तृत हैं। कहा जाता है कि ईसा से 800 वर्ष पूर्व से ही सुल्व सूत्र काल मे हिन्दुओं द्वारा बनायी गयी बेदियां द्विघातीय समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूलों पर आधारित बनती थीं। आर्यभट ने (476 ई०) में गुणोत्तर श्रेणियों के योगफल के लिए एक सूत्र, जिसमें द्विघातीय समीकरण के हल का अनुप्रयोग है, दिए। ब्रह्मगुप्त (598 ई०) ने द्विघातीय समीकरण के हल के लिए एक नियम बताया, जो द्विघातीय सूत्र से मिलता जुलता है। 850 ई० के लगभग महावीर ने द्विघातीय समीकरण तथा इसके मूलों के प्रयोग पर आधारित एक सूत्र प्रस्तावित किया।

लगभग 805 ई० में अल–ख्वारिजमी (Al-khowarizmi) एक अरबी गणितज्ञ ने द्विघातीय समीकरण के हल के लिए दो व्यापक विधियों का वर्णन किया। इन दोनों विधियों में यूनानियों द्वारा किए गए कार्यो का अधिक प्रभाव है। 1100 ई० में उमर ख्याम ने भी द्विघातीय समीकरण के हल के लिए एक विधि प्रस्तुत किए।

900 ई० के लगभग श्रीधराचार्य, जो एक प्रसिद्ध भारतीय गणितज्ञ थे, जिन्होने सर्वप्रथम व्यापक द्विघातीय समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूलों के लिए बीजगणितीय सूत्र प्रस्तुत किए, जिसके अनुसार दोनों मूल $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ द्वारा व्यक्त हैं।

गुणनखण्ड–विधि द्वारा द्विघातीय समीकरण को हल करने की विधि सर्वप्रथम 1631 ई० के लगभग हैरीयत (Harriot) के कार्यो मे पाया जाता है। अन्य जिन्होंने हाल ही में इस क्षेत्र में उल्लेखनीय कार्य किया है, वे स्वीटजरलैण्ड वासी ल्योनार्ड आयलर (Leonhard Euler) (1707-1783 ई०), फ्रांसीसी गणितज्ञ ई० बेजोट (E. Bezout) (1730-1783 ई०) और अंग्रेज गणितज्ञ जे०जे० सिल्वेस्टर (J.J. Sylvester) (1814 - 1897 ई०) हैं।

अनुक्रम और श्रेणी (SEQUENCES AND SERIES)

अध्याय 8

8.1 भूमिका

गणित में प्रतिरूपों का अध्ययन एक महत्वपूर्ण व्यापकीकरण की ओर इंगित करता है। एक सतत संख्या–समूह, जिसमें यदि एक संख्या को प्रथम, दूसरी को द्वितीय, तीसरी को तृतीय आदि कहा जा सकता है, तो ऐसी संख्यायें अनुक्रम की रचना करती हैं। अनुक्रमों की विस्तृत उपयोगिता है। उदाहरणतः विभिन्न समयों में वैक्टीरिया अथवा मानव की जनसंख्या अनुक्रम की रचना करते हैं। कोई धनराशि जो बैंक में सावधिक खाते में जमा कर दी जाती है, उसमें विभिन्न वर्षों में एक अनुक्रम में वृद्धि होती है। कुछ वस्तुएँ, जैसे रेडियोधर्मी तत्व, का क्षय एक अनुक्रम में होता हैं। इस अध्याय में हम विशेष प्रकार के अनुक्रमों यथा समान्तर अनुक्रम, गुणोत्तर अनुक्रम, हरात्मक तथा उनकी संगत श्रेणियों का अध्ययन करेंगे।

8.2 अनुक्रम

आइये हम निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें :–

अस्मिता ने एक बैंक में 1000 रुपये 10% चक्रवृद्धि वार्षिक ब्याज पर 12 वर्ष के लिये जमा किया। प्रथम, द्वितीय, तृतीय ... एवं 12 वर्ष के अन्त में मिश्रधन क्रमशः 1100, 1210, 1331, ..., 3138.43 रुपये (पैसे के निकट तक) हैं। ये धनराशि एक अनुक्रम का निर्माण करती हैं, ऐसा हम कहते हैं।

10 को 3 से भाग देते समय विभिन्न क्रियायों के बाद प्राप्त भागफलों पर विचार कीजिए। क्रिया में क्रमशः हम 3, 3.3, 3.33, 3.333 ... आदि पाते हैं। ये भागफल भी एक अनुक्रम का निर्माण करते हैं।

अर्थात अनुक्रम से हमारा तात्पर्य है, "किसी नियम के अनुसार एक निश्चित क्रम में संख्याओं की व्यवस्था"। एक अनुक्रम में जो संख्यायें आती हैं उन्हें हम उसका पद कहते हैं। अनुक्रम के पदों को हम $a_1, a_2, a_3, \ldots$ आदि द्वारा निरूपित करते हैं। प्रत्येक पदों के साथ लगी

संख्यायें, जिसे पदांक कहते हैं उसका स्थान बताती हैं। अनुक्रम का n वाँ पद n वें स्थान को निरूपित करता है और उसे a_n. द्वारा निरूपित करते हैं और उसे अनुक्रम का व्यापक पद भी कहते हैं। इस प्रकार उपर्युक्त चर्चित अस्मिता द्वारा बैंक में जमा विभिन्न धनराशियाँ निम्न प्रकार से निरूपित की जा सकती हैं :–

$$a_1 = 1100, a_2 = 1210, \ldots, a_{12} = 3138.43$$

इसी प्रकार भाग वाले उदाहरण में

$$a_1 = 3, a_2 = 3.3, a_3 = 3.33, \ldots, a_6 = 3.33333 \text{ आदि।}$$

वे अनुक्रम, जिनमें पदों की संख्या सीमित होती है, उसे "परिमित अनुक्रम" कहते हैं। उदाहरणतः अस्मिता की जमा राशियाँ परिमित अनुक्रम हैं, क्योंकि उसमें सीमित संख्या 12 है।

एक अनुक्रम, 'अपरिमित अनुक्रम' कहा जाता है, जिसमें पदों की संख्या सीमित नही होती है। उदाहरणतः पूर्वोक्त क्रमागत भागफलों का अनुक्रम एक 'अपरिमित अनुक्रम' कहलाता है। अपरिमित कहने का अर्थ है, जो कभी समाप्त नहीं होता।

प्रायः यह सम्भव है कि अनुक्रम के विभिन्न पदों को व्यक्त करने के नियम को एक बीज गणितीय सूत्र द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, प्राकृत सम संख्याओं का अनुक्रम 2, 4, 6, ... पर विचार कीजिए।

यहाँ

$$a_1 = 2 = 2 \times 1 \qquad a_2 = 4 = 2 \times 2$$

$$a_3 = 6 = 2 \times 3 \qquad a_4 = 8 = 2 \times 4$$

- - -   - -

- - -   - -

$$a_{21} = 42 = 2 \times 21 \qquad a_{22} = 44 = 2 \times 22$$

और इसी प्रकार अन्य।

वस्तुतः हम पाते हैं कि अनुक्रम का n वाँ पद $a_n = 2n$ लिखा जा सकता है, जबकि n एक प्राकृत संख्या है।

इसी प्रकार विषम प्राकृत संख्याओं के अनुक्रम में 1, 3, 5, 7, ..., n वें पद के सूत्र को $a_n = 2n-1$ के रूप में निरूपित किया जा सकता है, जबकि n एक प्राकृत संख्या है।

1, 1, 2, 3, 5, 8, ... का कोई निश्चित प्रतिरूप नहीं हैं, किन्तु अनुक्रम की रचना आवर्त्त संम्बन्धों द्वारा व्यक्त की जा सकती है। उदाहरणतः

$$a_1 = a_2 = 1$$

$$a \;\; = a \;\; + a \;\; , n \geq 3.$$

हम देखते हैं कि $a_3 = a_{3-2} + a_{3-1} = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$

$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$ और इसी प्रकार अन्य।

अभाज्य संख्याओं के अनुक्रम 2, 3, 5, 7, ... में n वीं अभाज्य संख्या का कोई ज्ञात सूत्र नहीं है अर्थात हर प्रकार के अनुक्रम के लिये यह अपेक्षा नहीं की जानी चाहिए कि उसके लिये कोई निश्चित सूत्र होगा। किन्तु फिर भी ऐसे अनुक्रम के निर्माण के लिये कोई न कोई सैद्धान्तिक नियम की आशा तो की ही जा सकती है जो पदों

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$

का क्रमागत रूप दे सकें।

उपर्युक्त तथ्यों के आधार पर एक अनुक्रम को हम एक फलन के रूप में ले सकते हैं। जिसका प्रान्त प्राकृत संख्याओं का समुच्चय हो अथवा उसका उपसमुच्चय $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ के प्रकार का हो। कभी कभी हम फलन के संकेत a_n के लिए $a(n)$ का उपयोग करते हैं।

माना कि यदि $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ अनुक्रम है, तो व्यंजक $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ सम्बन्धित अनुक्रम से बनी श्रेणी कहलाती है। श्रेणी परिमित अथवा अपरिमित होगी, जबकि अनुक्रम क्रमशः परिमित अथवा अपरिमित होगा।

अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करते हैं :

उदाहरण 1 दी गई परिभाषाओं के आधार पर निम्न प्रत्येक अनुक्रम के प्रथम तीन पद बताइयेः

(i) $a_n = n(n + 2)$.

(ii) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.

हल (i) यहाँ $a_n = n(n + 2)$.

$n = 1, 2$ और 3 रखने पर, हम पाते हैं :

$a_1 = 1\,(1 + 2) = 3$, $a_2 = 8$ और $a_3 = 15$.

अतः वाँछित तीन पद 3, 8 और 15 हैं।

(ii) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$. अर्थात $a_1 = \dfrac{1}{(1+1)} = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = \dfrac{2}{3}$ तथा $a_3 = \dfrac{3}{4}$

इस प्रकार प्रथम तीन पद $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}$ और $\dfrac{3}{4}$ हैं।

उदाहरण 2 अनुक्रम का 19 वाँ पद क्या है?

$$a_n = \frac{n(n-2)}{(n+3)}.$$

हल हम $n = 19$ प्रतिस्थापित करने पर

$$a_{19} = \frac{19\,(19-2)}{19+3} = \frac{19\times 17}{22} = \frac{323}{22} \text{ पाते हैं।}$$

उदाहरण 3 माना कि अनुक्रम निम्न रूप में परिभाषित है :

$a_1 = 3$

$a_n = 3a_{n-1} + 2$, सभी $n > 1$ के लिए,

तो अनुक्रम के प्रथम चार पद बताइये:

हल दिया हैं $a_1 = 3$

$a_2 = 3a_1 + 2 = 3 \times 3 + 2 = 11$

$a_3 = 3a_2 + 2 = 3 \times 11 + 2 = 35$

$a_4 = 3a_3 + 2 = 3 \times 35 + 2 = 107.$

अतः अनुक्रम के प्रथम चार पद 3, 11, 35 तथा 107 हैं।

प्रश्नावली 8.1

निम्नलिखित अनुक्रमों में प्रत्येक का प्रथम पाँच पद लिखिये, जिनका n वाँ पद दिया गया है :

1. $a_n = 2n + 5.$

2. $a_n = \dfrac{n-3}{4}$

3. $a_n = 2^n.$

4. $a_n = \dfrac{2n-3}{6}.$

5. $a_n = (-1)^{n-1}5^{n+1}.$

6. $a_n = \dfrac{n\,(n^2+5)}{4}.$

निम्नलिखित अनुक्रमों, के वाँछित पद बताइये, जिनका n वाँ पद दिया गया है:–

7. $a_n = 4n - 3$; 15 वाँ पद, 23 वाँ पद अर्थात a_{15}, a_{23}.

8. $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$; a_5.

9. $a_n = (-1)^{n-1} n^3$; a_7.

10. $a_n = (n-1)(2-n)(3+n)$; a_1, a_2, a_3.

निम्न दिये गये अनुक्रमों के अगले पाँच पद ज्ञात कीजिये।

11. $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 2, (n \geq 2).$

12. $a_1 = -1, a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}, (n \geq 2).$

13. $a_1 = a_2 = 2, a_n = a_{n-1} - 1, (n > 2)$.

14. फिबोनासी अनुक्रम निम्न रूप में परिभाषित हैं :

$a_1 = 1 = a_2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ (n > 2)$. $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ निकालिये, जबकि $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

3.3 समान्तर श्रेढ़ी (A.P.)

आइये निम्न अनुक्रमों पर विचार करें:–

(1) 2, 5, 8, 11, 14, …

(2) 16, 11, 6, 1, –4, –9, …

(3) $x - 3b, x + b, x + 5b, x + 9b, \ldots$

इन प्रत्येक अनुक्रमों में हम पाते हैं कि, प्रथम पद को छोड़, सभी पद एक निश्चित नियम के अनुसार बढ़ते हैं। ये पद किस तरह बढ़ते हैं?

(1) में हम पाते हैं:

$a_1 = 2$

$a_2 = a_1 + 3$

$a_3 = a_2 + 3$

$a_4 = a_3 + 3$ इत्यादि

(2) में हम पाते हैं:

$a_1 = 16$

$a_2 = a_1 + (-5)$

$a_3 = a_2 + (-5)$

$a_4 = a_3 + (-5)$ इत्यादि

(3) में हम देखते हैं

$a_1 = x - 3b$

$a_2 = a_1 + 4b$

$a_3 = a_2 + 4b$

$a_4 = a_3 + 4b$ इत्यादि

उपर्युक्त स्थितियों में हम पाते हैं कि प्रत्येक में प्रथम पद को छोड़, अगला पद पिछले पद में एक निश्चित संख्या (घनात्मक अथवा ऋणात्मक) जोड़ने से प्राप्त होता है। (1) में वह निश्चित संख्या 3 है, (2) में वह निश्चित संख्या –5 तथा (3) में वह निश्चित संख्या 4b है। अनुक्रम जो निश्चित प्रतिरूप का अनुसरण करते हैं, प्रायः श्रेढ़ी कहलाते हैं।

उपरोक्त जैसे अनुक्रम समान्तर अनुक्रम या समान्तर श्रेढ़ी या संक्षेप में A.P. कहलाते हैं। अतः किसी भी अनुक्रम $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ को हम समान्तर श्रेढ़ी कहते हैं, यदि

$a_{n+1} = a_n + d, n \in N$ है।

a_1 को प्रथम पद, तथा अचल पद d को A.P. का सार्व अन्तर कहते हैं। उपरोक्त समान्तर श्रेढ़ी (1), (2) तथा (3) में क्रमशः $d = 3, -5$ तथा $4b$ हैं।

8.3.1 समान्तर श्रेढ़ी (A.P.) का nवाँ अथवा व्यापक पद

आइये एक ऐसी समान्तर श्रेढ़ी, पर विचार करें, जिसका प्रथम पद a, सार्व अन्तर d है, यथा $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$. तो

प्रथम पद $= a_1 = a = a + (1-1)\, d$

द्वितीय पद $= a_2 = a + d = a + (2-1)\, d$

तृतीय पद $= a_3 = a + 2d = a + (3-1)\, d$

चतुर्थ पद $= a_4 = a + 3d = a + (4-1)\, d$

\- - - - -

\- - - - -

nवाँ पद $= a_n = a + (n-1)d$.

क्या आप किसी प्रतिरूप को पाते हैं? ध्यान से देखने पर हम पाते हैं कि अमुक पद

प्रथम पद + (पदों की संख्या − 1) (सार्व अन्तर) से प्राप्त किया जा सकता है।

16 वाँ पद क्या होगा? हम पाते हैं

$a_{16} = a + (16-1)\, d = a + 15d.$

टिप्पणी हम A.P. की सामान्य विशेषताओं का परीक्षण कर सकते हैं:

(1) यदि A.P. के प्रत्येक पद में एक अचर पद जोड़ा जाय, तो इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम A.P. होता है।

(2) यदि किसी A.P. के प्रत्येक पद में से एक अचर पद घटाया जाय तो, इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम A.P. होता है।

(3) यदि किसी A.P. के प्रत्येक पद में एक अचर पद से गुणा किया जाय तो, इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम A.P. होता है।

(4) यदि किसी A.P. के प्रत्येक पद को एक अशून्य अचर पद से भाग दिया जाय तो, इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम एक A.P. होगा।

आइये कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 4 निम्नलिखित A.P. का 20वाँ, 25वाँ तथा nवाँ पद ज्ञात कीजिये।

$$21, 16, 11, 6, 1, -4, -9, \ldots$$

हल हमें ज्ञात है कि किसी A.P. का n वाँ पद

$$a_n = a + (n-1)\,d$$

यहाँ $a = 21$ और $d = -5$ (क्यों?)

अतः $a_{20} = a + (20-1)\,d = 21 + 19\,(-5) = -74$

$a_{25} = a + (25-1)\,d = 21 + 24\,(-5) = -99$

और $a_n = a + (n-1)\,d = 21 + (n-1)\,(-5) = 26 - 5n.$

उदाहरण 5 किसी A.P. का प्रथम पद -4 तथा 10 वाँ पद 14 है। 30 वाँ पद ज्ञात कीजिये।

हल A.P. के व्यापक पद के सूत्र में दो अज्ञात राशियाँ a और d होती हैं। हमें दिया गया है कि $a = -4$ और $a_{10} = 14$, इसलिये

$$-4 + 9d = 14$$

या $d = 2$

इस प्रकार $a_{30} = a + (30-1)\,d$

$$= -4 + 29\,(2) = 54.$$

उदाहरण 6 निम्न दिये गये A.P. का व्यापक पद निकालिये।

$$x + b,\ x + 3b,\ x + 5b, \ldots$$

हल यहाँ $a = x + b$, $d = 2b$.

व्यापक पद अर्थात्

$$a_n = a + (n-1)\,d$$

$$= (x + b) + (n-1)\,2b = x + (2\,n - 1)\,b.$$

उदाहरण 7 A.P. 1, 6, 11, 16, ... का कौन सा पद 301 है?

हल दिया गया अनुक्रम A.P. है। यहाँ $a = 1$ और $d = 5$। माना A.P. का n वाँ पद $= 301$ है तो

$$a_n = a + (n-1)\,d$$

इसलिए $301 = 1 + (n-1)\,5$

या $n = 61.$

अतः वाँछित पद 61 वाँ पद है।

उदाहरण 8 किसी A.P. का 10 वाँ पद 52 है तथा 16 वाँ पद 82 तो 32 वाँ पद निकालिये।

हल दिया है $a_{10} = 52$ और $a_{16} = 82$.

इसलिये $52 = a + 9d$ (1)

और $82 = a + 15d$. (2)

(1) और (2), को हल करने पर, हम पाते हैं,

$a = 7$ और $d = 5$.

अतः $a_{32} = a + (32-1)\,d$

$= 7 + 31 \times 5 = 162.$

इस प्रकार वाँछित पद 162 है।

उदाहरण 9 दर्शाइये a^2, b^2, c^2 A.P. में होंगे यदि $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ A.P. में है।

हल चूंकि $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ समान्तर श्रेढ़ी में हैं।

अर्थात $\frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a}$ (क्यों?)

अतः $\frac{b-a}{(c+a)(b+c)} = \frac{c-b}{(a+b)(c+a)}$

या $\frac{b-a}{b+c} = \frac{c-b}{a+b}$

या $b^2 - a^2 = c^2 - b^2$.

इससे यह सिद्ध होता है कि a^2, b^2, c^2 A.P. में हैं।

प्रश्नावली 8.2

1. निम्नलिखित प्रत्येक समान्तर श्रेढ़ी का सार्वअन्तर तथा अगले चार पद ज्ञात कीजिये।

   (i) $0, -3, -6, -9, \ldots$

   (ii) $-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{2} \ldots$

   (iii) $x + y,\ x - y,\ x - 3y, \ldots$

   (iv) $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \ldots$

2. निम्नलिखित प्रत्येक समान्तर श्रेढ़ी में वाँछित पदों को ज्ञात कीजिए।

(i) $-1, -2, -3, -4, \ldots ; a_{100}$.

(ii) $n-1,\ n-2,\ n-3, \ldots ; a_m$.

(iii) $a = 3,\ d = 2\ ;\ a_{10}, a_n$.

(iv) $a = \frac{1}{5}, d = \frac{2}{3};\ a_{18}, a_n$.

3. उस समान्तर श्रेढ़ी, जिसका 9 वाँ पद –6 तथा सार्वअन्तर $\frac{5}{4}$ हो, का 25 वाँ पद ज्ञात कीजिये।

4. उस समान्तर श्रेढ़ी, जिसका 6 वाँ पद 12 तथा 8 वाँ पद 22 हो, का दूसरा और r वाँ पद ज्ञात कीजिए।

5. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के m वें पद का m गुना उसके n वें पद का n गुना हो तो सिद्ध कीजिए कि उसका $(m + n)$ वाँ पद शून्य है।

6. किसी A.P. का तीसरा पद p है, तथा चौथा पद q है तो 10 वाँ तथा व्यापक पद ज्ञात कीजिये।

7. समान्तर श्रेढ़ी 5, 2, –1, ... का कौन सा पद –22 है?

8. k का मान ज्ञात कीजिये, यदि $k+2$, $4k-6$ तथा $3k-2$ समान्तर श्रेढ़ी के क्रमागत् तीन पद हों।

9. यदि a तथा b दो अचर संख्यायें हों तो सिद्ध कीजिये कि रैखिक फलन $f(n) = an + b$ एक समान्तर श्रेढ़ी को निरूपित करता है जहाँ a और b अचर हैं।

10. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी में m वाँ पद $\frac{1}{n}$ तथा n वाँ पद $\frac{1}{m}$ हों तो (mn) वाँ पद ज्ञात कीजिये।

11. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी का m वाँ पद n तथा n वाँ पद m हो तो सिद्ध कीजिए कि r वाँ पद $m+n-r$ है।

12. 69 को ऐसे तीन भागों में विभक्त कीजिए जो समान्तर श्रेढ़ी में हों ताकि दो छोटे पदों का गुणनफल 483 हों। [संकेतः A.P. के पद $a-d,\ a,\ a+d$ लें]

13. किसी समान्तर श्रेढ़ी के तीन क्रमागत् पदों, को बताइये, जिनका योगफल 21 तथा गुणनफल 315 हो।

14. यदि a, b, c समान्तर श्रेढ़ी में हों, तो सिद्ध कीजिए कि $b+c$, $c+a$ तथा $a+b$ भी A.P. में हैं।

15. यदि $a + b + c \neq 0$ तथा $\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$ A.P. में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ भी A.P. में हैं।

16. यदि $a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right), b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right), c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ A.P. में हों, तो सिद्ध कीजिए कि a, b, c A.P. में हैं।

[संकेत :– पहले प्रत्येक पद में 1 जोड़िये तथा प्रत्येक पद को $\frac{abc}{(ab+bc+ca)}$ से गुणा करें और हल करें]

17. किसी समान्तर श्रेढ़ी के pवाँ, qवाँ, तथा rवाँ पद क्रमशः a, b, c, हों तो सिद्ध कीजिए कि $(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0$.

8.3.2 समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग

महान जर्मन गणितज्ञ 'कॉर्ल–फ्रेडरिक गॉस' जब प्राथमिक विद्यालय मे थे तो उनके शिक्षक ने पूरी कक्षा को प्रथम 100 तक प्राकृत संख्याओं का योग ज्ञात करने को कहा। जब पूरी कक्षा के विद्यार्थी प्रश्न के हल हेतु संघर्ष कर रहे थे, गॉस ने शीघ्रता से उसका उत्तर दे दिया। नीचे हम गॉस की ही जैसी विधि समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग निकालने हेतु दे रहे हैं।

माना कि किसी A.P. का प्रथम पद a है, सार्वअन्तर d है। माना कि S_n, A.P. के n पदों का योग निरूपित करता है, तो

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + [a+(n-2)\,d] + [a+(n-1)\,d] \qquad (1)$$

इसका योग ज्ञात करने के लिए S_n को उल्टे क्रम में लिखते हैं जैसा,

$$S_n = [a+(n-1)\,d] + [a+(n-2)\,d] + [a+(n-3)\,d] + \ldots + (a+d) + a \qquad (2)$$

(1) और (2) के संगत पदों को जोड़ने पर हम पाते हैं कि, किसी पद को उसके संगत पद से जोड़ने पर $[2a+(n-1)d]$ प्राप्त होता है। उदाहरणतः

$$a + [a+(n-1)d] = 2a + (n-1)d$$
$$(a+d) + [a+(n-2)\,d] = 2a + (n-1)\,d$$

– – – – –

– – – – –

$$[a+(n-2)\,d] + (a+d) = 2a + (n-1)\,d$$
$$[a+(n-1)\,d] + a = 2a + (n-1)\,d.$$

कितनी बार हम $2a+(n-1)\,d$ पायेंगे?

यह स्पष्ट है कि S_n हेतु (1) तथा (2) में अलग अलग n पद हैं, इसलिए हम

$$2\,S_n = n\,[2a + (n-1)\,d]$$ प्राप्त करते हैं।

या $$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d].$$

पुनः हमें ज्ञात है कि किसी n पदों वाली A.P. में अन्तिम पद

$$l = a + (n-1)\,d$$

इसलिए, हम यह भी लिख सकते हैं

$$S_n = \frac{n}{2}\,[a + (a + (n-1)\,d]$$

$$= \frac{n}{2}\,(a + l).$$

दूसरे शब्दों में A.P. के प्रथम n पदों का योग, प्रथम पद एंव अन्तिम पद के औसत का n गुना है।

उदाहरण 10 A.P. के n पदों का योग ज्ञात कीजिए जिसका n वाँ पद $5 - 6n$, है जहाँ $n \in N$.

हल दिया गया अनुक्रम A.P. में है जिसका प्रथम पद $a_1 = -1$ तथा अन्तिम या n वाँ पद $l = 5 - 6n$ है, अतः n पदों का योग

$$S_n = \left(\frac{n}{2}\right)(-1 + 5 - 6n)$$

$$= \left(\frac{n}{2}\right)(4 - 6n) = n(2 - 3n)$$ हैं।

उदाहरण 11 समान्तर श्रेढ़ी 5, 2, –1, –4, –7,... के n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $a = 5$ तथा $d = -3$, अतः n पदों का योग

$$S_n = \left(\frac{n}{2}\right)[2a + (n-1)\,d]$$

$$= \left(\frac{n}{2}\right)[2(5) + (n-1)\,(-3)]$$

$$= \left(\frac{n}{2}\right)(10 - 3n + 3) = \left(\frac{n}{2}\right)(13 - 3n)$$ है।

उदाहरण 12 यदि समान्तर श्रेढ़ी 25, 22, 19, ... के प्रथम पद से प्रांरम्भ कुछ पदों का योग 116 है तो अन्तिम पद ज्ञात कीजिये।

हल माना दी गई A.P. में पदों की संख्या n है जिसका योग 116 है :

यहाँ दी गई समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद $a = 25, d = -3$. तो n पदों का योग

$$S_n = \left(\frac{n}{2}\right)[2a + (n-1)\,d]$$

इसलिए $$116 = \left(\frac{n}{2}\right)[50 + (n-1)(-3)]$$

या $$232 = 50n - 3n^2 + 3n$$

या $$3n^2 - 53n + 232 = 0,$$

जिससे हम पाते हैं

$$n = \frac{53 \pm \sqrt{(53)^2 - 4 \times 3 \times 232}}{6}$$

$$= \frac{53 \pm 5}{6} = \frac{29}{3} \text{ या } 8.$$

किन्तु $n = \frac{29}{3}$, n का मान स्वीकार्य नहीं है, अतः $n = 8$

अर्थात अन्तिम पद या 8 वाँ पद

$$a_8 = a + (8-1)d$$

$$= 25 + 7 \times (-3) = 4 \text{ है।}$$

उदाहरण 13 उस समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग ज्ञात कीजिये यदि k वाँ पद $5k + 1$ हो।

हल दिया है कि $a_k = 5k + 1$, k के स्थान पर 1, 2, 3, ...रखने पर हमें समान्तर श्रेणी

$$6 + 11 + 16 + 21 + \ldots$$

प्राप्त होती है।

यहाँ $a = 6,\ d = 5$

इसलिए $$S_n = \left(\frac{n}{2}\right)[2a + (n-1)d]$$

$$= \left(\frac{n}{2}\right)[2(6) + (n-1)(5)] = \left(\frac{n}{2}\right)(5n + 7)$$

उदाहरण 14 यदि किसी A.P. के n पदों का योग $(pn + qn^2)$ है, जहाँ p तथा q अचर राशियाँ हों तो सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए।

हल माना कि $a_1, a_2, ..., a_n$, दी गई A.P. है, तो

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n = pn + qn^2.$$

इसलिए $S_1 = a_1 = p + q$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 2p + 4q,$$

ताकि $a_2 = S_2 - S_1 = p + 3q$

अतः सार्वअन्तर निम्न है :

$$d = a_2 - a_1 = (p + 3q) - (p + q) = 2q.$$

उदाहरण 15 दो समान्तर श्रेढ़ियों के n पदों के योगफल का अनुपात $5n + 4 : 9n + 6$. हों, तो उनके 18 वें पद का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल माना कि a_1, a_2 तथा d_1, d_2 क्रमशः दोनों समान्तर श्रेढ़ियों के प्रथम पद और सार्वअन्तर हैं, तो दी हुई शर्तों के अनुसार, हम पाते हैं

$$\frac{\text{प्रथम A.P. के } n \text{ पदों का योग}}{\text{द्वितीय A.P. के } n \text{ पदों का योग}} = \frac{5n+4}{9n+6},$$

या
$$\frac{\frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2 + (n-1)d_2]} = \frac{5n+4}{9n+6},$$

या
$$\frac{2a_1 + (n-1)d_1}{2a_2 + (n-1)d_2} = \frac{5n+4}{9n+6}. \qquad (1)$$

अब
$$\frac{\text{प्रथम A.P. का 18वाँ पद}}{\text{द्वितीय A.P. का 18वाँ पद}} = \frac{a_1 + 17d_1}{a_2 + 17d_2},$$

$$= \frac{2a_1 + 34d_1}{2a_2 + 34d_2} = \frac{5 \times 35 + 4}{9 \times 35 + 6} \quad [\text{(i) में } n = 35 \text{ रखने पर}]$$

$$= \frac{179}{321}$$

अतः वांछित अनुपात 179 : 321 है।

8.3.3 समान्तर माध्य : जब तीन संख्याए a, A तथा b, A. P. में हों तो A को a और b का समान्तर माध्य कहा जाता है।

दिया गया है कि a, A, b, A. P. में हैं तो

$$A - a = b - A,$$

अर्थात् $$A = \frac{a+b}{2}.$$

इस प्रकार a तथा b के मध्य वाँछित समान्तर माध्य $\frac{a+b}{2}$ है।

निम्न A.P. पर विचार कीजिए

3, 8, 13, 18, 23, 28, 33

यहाँ प्रथम पद 3 तथा अन्तिम पद 33 के बीच पाँच पद हैं, 8, 13, 18, 23, 28. ये पाँच पद 3 और 33 के बीच समान्तर माध्य कहलाते हैं। पुनः A.P. 3, 13, 23, 33 पर विचार कीजिए। इसमें दो समान्तर माध्य 13 और 23, 3 और 33 के मध्य हैं। पुनः A.P.

$$3,\ 5\frac{1}{2},\ 8,\ 10\frac{1}{2},\ 13,\ 15\frac{1}{2},\ 18,\ 20\frac{1}{2},\ 23,\ 25\frac{1}{2},\ 28,\ 30\frac{1}{2},\ 33,$$

पर विचार करने पर, हम पाते हैं कि 3 तथा 33 के मध्य ग्यारह समान्तर माध्य हैं।

उपर्युक्त उदाहरणों से हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि 3 तथा 33 के मध्य हम जितना समान्तर माध्य चाहें रख सकते हैं।

अर्थात यदि दो संख्याओं a तथा b दी गई हों तो सामान्यतः इनके मध्य किसी संख्या तक समान्तर माध्य रखे जा सकते हैं। माना कि $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$, n, a तथा b के मध्य n समान्तर माध्य हैं, तो $a, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, b$ A.P. में हैं

यहाँ b, $(n + 2)$ वाँ पद है, अर्थात

$$b = a + [(n + 2) - 1]d$$

या $$b = a + (n + 1)\,d$$

इससे हम पाते हैं $$d = \frac{b-a}{n+1}$$

इस प्रकार a तथा b के मध्य n समान्तर माध्य निम्न हैं

$$A_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1}$$

$$A_2 = a + 2d = a + \frac{2(b-a)}{n+1}$$

$$A_3 = a + 3d = a + \frac{3(b-a)}{n+1}$$

- - - - -

- - - - -

$$A_n = a + nd = a + \frac{n(b-a)}{n+1}.$$

उदाहरण 16 8 तथा 26 के मध्य पाँच समान्तर माध्य रखिये।

हल माना कि A_1, A_2, A_3, A_4 तथा A_5, 8 तथा 26 के मध्य पाँच समान्तर माध्य हैं।

इसलिए $8, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, 26$ A.P. में हैं, जिसमें

$a = 8,\ b = 26,\ n = 7.$

इस प्रकार $26 = 8 + (7 - 1)d$

इस प्रकार $d = 3.$

इसलिए

$$\begin{aligned} A_1 &= a + d &&= 8 + 3 &&= 11 \\ A_2 &= a + 2d &&= 8 + 2 \times 3 &&= 14 \\ A_3 &= a + 3d &&= 8 + 3 \times 3 &&= 17 \\ A_4 &= a + 4d &&= 8 + 4 \times 3 &&= 20 \\ A_5 &= a + 5d &&= 8 + 5 \times 3 &&= 23. \end{aligned}$$

अतः 8 और 26 के मध्य, पाँच समान्तर माध्य 11, 14, 17, 20 तथा 23 हैं।

प्रश्नावली 8.3

निम्नलिखित प्रत्येक समान्तर श्रेढ़ी का योगफल, निर्देश के अनुसार ज्ञात कीजिये।

1. 16, 11, 6,... ; 23 पदों तक

2. –0.5, –1.0, –1.5, ... ; 10 पदों तक

3. $-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \ldots$; 81 पदों तक

4. $x + y,\ x - y,\ x - 3y,\ \ldots$; 22 पदों तक

5. 2, 4, 6, 8, ... ; 100 पदों तक

6. 100 तथा 1000 के मध्य उन सभी पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जो 5 के गुणज हों।

7. किसी समान्तर श्रेढ़ी, के प्रथम 35 पदों का येागफल ज्ञात कीजिये, यदि उसका द्वितीय पद 2 तथा 7 वाँ पद 22 है।

8. A.P. $-6, -\frac{11}{2}, -5, \ldots$ के कितने पदों का योगफल –25 है?

9. किसी A.P. में प्रथम पद 2 है तथा प्रथम पाँच पदों का योगफल, अगले पाँच पदों के योगफल का एक चौथाई है। दिखाईये कि 20 वाँ पद –112 है।

10. अनुक्रम 18, 16, 14, ... के कितने पद लिये जाँय कि उनका योगफल शून्य हो।

11. किसी A. P. में यदि 12 वाँ पद –13 तथा प्रथम चार पदों का योगफल 24 है, तो प्रथम 10 पदों का योगफल निकालिये।

12. किसी A. P. में यदि 5 वाँ तथा 12 वाँ पद क्रमशः 30 तथा 65 हैं तो प्रथम 20 पदों का योगफल कितना होगा?

13. किसी A. P. में यदि प्रथम पद 22, सार्वअन्तर –4 है तथा n पदों का योगफल 64 है तो n ज्ञात कीजिये।

14. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी का p वाँ पद $\frac{1}{q}$ तथा q वाँ पद $\frac{1}{p}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि pq वाँ पद $\frac{1}{2}(pq+1)$ होगा।

15. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम p, q, r पदों का योगफल क्रमशः a, b तथा c हों तो सिद्ध कीजिये कि $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0.$

16. किसी समान्तर श्रेढ़ी के m तथा n पदों के योगफलों का अनुपात $m^2 : n^2$. है तो दिखाइये कि mवें तथा nवें पदों का अनुपात $(2m-1):(2n-1)$ है।

17. यदि $\frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}$, a तथा b के मध्य समान्तर माध्य हो तो n का मान निकालिये।

18. 3 तथा 24 के मध्य 6 समान्तर माध्य रखिये।

19. 1 तथा 31 के मध्य इस प्रकार m समान्तर माध्य रखे गये हैं, कि 7 वें तथा $(m-1)$ वें माध्य का अनुपात 5:9 है तो m का मान ज्ञात कीजिये।

20. सिद्ध कीजिये कि दो संख्याओं के मध्य रखे गये n समान्तर माध्यों का योगफल उनके मध्य एक समान्तर माध्य का n गुना है।

8.4 गुणोत्तर श्रेढ़ी (G.P.)

आइये निम्नलिखित अनुक्रमों पर विचार करें:

(1) 2, 4, 8, 16, …

(2) $\frac{1}{9}, \frac{-1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{-1}{243}, \ldots$

(3) .01, .0001, .000001, …

उपर्युक्त प्रत्येक अनुक्रम में हम पाते हैं कि प्रथम पद को छोड़, सभी एक विशेष क्रम में बढ़ते हैं। ये पद कैसे बढ़ते हैं?

(1) में हम पाते हैं

$$a_1 = 2, \frac{a_2}{a_1} = 2, \frac{a_3}{a_2} = 2, \frac{a_4}{a_3} = 2 \text{ आदि}$$

(2) में हम पाते हैं

$$a_1 = \frac{1}{9}, \frac{a_2}{a_1} = \frac{-1}{3}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{-1}{3}, \frac{a_4}{a_3} = \frac{-1}{3} \text{ आदि}$$

इसी प्रकार (3) में पद कैसे अग्रसर होते हैं बताइये?

निरीक्षण से यह ज्ञात हो जाता है कि प्रत्येक स्थिति में, प्रथम पद को छोड़, हर अगला पद अपने पिछले पद से एक अचर अनुपात में बढ़ता है। (1) में यह अनुपात 2 है, (2) में यह $-\frac{1}{3}$ है तथा (3) में यह 0.01 है। ऐसे अनुक्रमों को गुणोत्तर अनुक्रम या गुणोत्तर श्रेढ़ी या संक्षेप मे G.P. कहते हैं।

अनुक्रम $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ को गुणोत्तर श्रेढ़ी (G.P.) कहा जाता है यदि प्रत्येक पद अशून्य हो तथा

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = r \text{ (अचल) प्रत्येक } k \geq 1.$$

a_1 के स्थान पर a लिखने पर हम गुणोत्तर श्रेढ़ी पाते हैं:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots .$$

a को प्रथम पद कहा जाता है तथा $r \neq 0$ को गुणोत्तर श्रेढ़ी का सार्वअनुपात कहा जाता है। गुणोत्तर श्रेढ़ी (1), (2) तथा(3) में सार्वअनुपात क्रमशः $2, -\frac{1}{3}$ तथा 0.01 हैं।

8.4.1 गुणोत्तर श्रेढ़ी का n वाँ पद ज्ञात करना

आइये हम एक गुणोत्तर श्रेढ़ी G.P. जिसका प्रथम पद a (अशून्य) तथा सार्वअनुपात r है, पर विचार करें। इसके कुछ पदों को लिखिये। दूसरा पद, प्रथम पद a में सार्वअनुपात r से गुणा करने पर प्राप्त होता है, अर्थात $a_2 = ar$, इसी प्रकार तीसरा पद $a_3 = a_2 r = ar^2$ आदि। हम इन्हें तथा कुछ और पद नीचे लिखते हैं :–

$$\begin{aligned}
\text{प्रथम पद} &= a_1 = a = ar^{1-1} \\
\text{द्वितीय पद} &= a_2 = ar = ar^{2-1} \\
\text{तृतीय पद} &= a_3 = ar^2 = ar^{3-1} \\
\text{चतुर्थ पद} &= a_4 = ar^3 = ar^{4-1} \\
\text{पाँचवाँ पद} &= a_5 = ar^4 = ar^{5-1}
\end{aligned}$$

क्या आप कोई प्रतिरूप देखते हैं? 16 वाँ पद क्या होगा बताइये। $a_{16} = ar^{16-1} = ar^{15}$.

इसलिये यह प्रतिरूप बताता है कि G.P. का n वाँ पद

$$a_n = ar^{n-1}.$$

अर्थात गुणोत्तर श्रेढ़ी इस रूप में लिखी जा सकती है: $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}$. या $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}, \ldots$ क्रमशः जब श्रेढ़ी परिमित हो या जब श्रेढ़ी अपरिमित हो।

गुणोत्तर श्रेणी क्रमशः $a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}$ या $a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}+\ldots$ परिमित या अपरिमित कही जाती है।

8.4.2 गुणोत्तर श्रेढ़ी (G.P.) के n पदों का योगफल

माना कि G.P. का प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r. है तथा श्रेढ़ी के n पदों का योगफल S_n है। तब

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} \quad (1)$$

स्थिति I यदि $r = 1$, तो हम पाते हैं

$$S_n = a + a + a \ldots + a \text{ (}n\text{ पदों तक)}$$

$$= na.$$

स्थिति II यदि $r \neq 1$, (1) को r से गुणा करने पर हम पाते हैं:

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n. \quad (2)$$

(2) को (1) में से घटाने पर हम पाते हैं:

$$(1-r)\, S_n = a - ar^n$$

इससे हम पाते हैं :

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \text{ यदि } |r| < 1$$

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, \text{ यदि } |r| > 1.$$

8.4.3 गुणोत्तर माध्य : माना कि $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ G.P. में हैं जिसके सभी पद धनात्मक हैं तथा

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots \frac{a_k}{a_{k-1}} = \ldots$$

इस प्रकार $a_2^2 = a_1a_3, a_3^2 = a_2a_4, \ldots a_k^2 = a_{k-1}a_{k+1}, k = 1, 2, \ldots n.$

दूसरी प्रकार से लिखने पर, हम पाते हैं :

$a_2 = \sqrt{a_1a_3}$, a_1 तथा a_3 का गुणोत्तर माध्य है

$a_3 = \sqrt{a_2 a_4}$, a_2 तथा a_4 का गुणोत्तर माध्य है

$a_k = \sqrt{a_{k-1} a_{k+1}}$, a_{k-1} तथा a_{k+1} का गुणोत्तर माध्य है

और इस प्रकार अन्य।

यदि दो धनात्मक संख्यायें a तथा b दी गई हों तो उनके बीच जितने चाहें उतने गुणोत्तर माध्य रखे जा सकते हैं। माना कि a तथा b के बीच n गुणोत्तर माध्य $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n$ रखे जाने हैं, तो

$a, G_1, G_2, \ldots, G_n, b$ G.P. में हैं।

इस प्रकार चूँकि b, G.P. का $(n + 2)$ वाँ पद है, तो हम पाते हैं

$$b = ar^{n+1}$$

या $$r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

या $$r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

अतः $$G_1 = ar = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$G_2 = ar^2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}$$

- - - - -

- - - - -

$$G_n = ar^n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}.$$

उदाहरण 17 निम्न दी गई G.P. का 20वाँ तथा n वाँ पद ज्ञात कीजिये।

$$\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$$

हल यहाँ $a = \frac{5}{2}$ तथा $r = \frac{1}{2}$.

इस प्रकार $a_{20} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{20-1} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{5}{2^{20}}$,

तथा $a_n = ar^{n-1} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{5}{2^n}$.

उदाहरण 18 G.P. 2, 2 $\sqrt{2}$, 4,... का कौन सा पद 128 है?

हल माना कि 128 G.P. का n वाँ पद है। यहाँ a=2 तथा $r = \sqrt{2}$. इसलिये

$$128 = a_n = 2(\sqrt{2})^{n-1}$$

$$= 2 \times 2^{\frac{n-1}{2}},$$

जिससे हम पाते हैं

$$2^6 = 2^{\frac{n-1}{2}}$$

ताकि $\frac{n-1}{2} = 6$, अतः $n = 13$.

अर्थात 128 G.P. का 13वाँ पद है।

उदाहरण 19 एक G.P. में तीसरा पद 24 तथा 6 वाँ पद 192 है, तो 10 वाँ पद ज्ञात कीजिये।

हल यहाँ $a_3 = ar^2 = 24$ (1)

तथा $a_6 = ar^5 = 192$ (2)

(2) को (1) से भाग देने पर, हम पाते हैं $r^3 = 8$, तथा $r = 2$

(1) में r के स्थान पर 2 रखने पर हम पाते हैं $a = 6$.

अतः $a_{10} = 6(2)^9 = 3072$.

उदाहरण 20 निम्न गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम n पदों तथा पुनः प्रथम 5 पदों का योगफल ज्ञात कीजिये।

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^{n-1}} + \ldots$$

हल यहाँ $a = 1$, तथा $r = \frac{1}{3}$ (< 1). इसलिये

$$S_n = a\frac{(1-r^n)}{1-r} = \frac{\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right).$$

विशेषतः $S_5 = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^5}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{242}{243} = \frac{726}{486} = \frac{121}{81}$.

उदाहरण 21 G.P. $3, 3^2, 3^3, \ldots$ के कितने पद आवश्यक है ताकि उनका योगफल 120 हो?

हल माना कि n वाँछित पदों की संख्या है। दिया है $a = 3$, $r = 3$ तथा $S_n = 120$. इसलिये सूत्र

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1},$$

से हम पाते हैं

$$120 = \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{3}{2}\left(3^n - 1\right)$$

जिससे हम पाते हैं $81 = 3^n$,

या $3^4 = 3^n$,

या $n = 4$.

उदाहरण 22 किसी G.P. के प्रथम तीन पदों का योगफल $\frac{39}{10}$ तथा उनका गुणफल 1 है, तो प्रथम पद, सार्वअनुपात तथा, तीनों पदों को ज्ञात कीजिये।

हल माना कि $\frac{a}{r}, a, ar$ G.P. के तीन पद हैं।

तो $$\frac{a}{r} + a + ar = \frac{39}{10} \quad (1)$$

तथा $$\left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = 1. \quad (2)$$

(2) से हम पाते हैं $a^3 = 1$, i.e., $a = 1$. (केवल वास्तविक मूल पर विचार करने से)

(1) में $a = 1$ रखने पर, हम पाते हैं

$$\frac{1}{r} + 1 + r = \frac{39}{10}$$

या $$10r^2 - 29r + 10 = 0.$$

यह r में द्विघात समीकरण है, जिसे हल करने पर हम पाते हैं :

$$r = \frac{29 \pm \sqrt{(29)^2 - 4 \times 10 \times 10}}{20}$$

$$= \frac{29 \pm 21}{20} = \frac{5}{2} \text{ or } \frac{2}{5}.$$

इस प्रकार G.P. के तीन पद हैं

$\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}; r = \frac{5}{2}$ के लिए

तथा $\frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}; r = \frac{2}{5}$ के लिए

उदाहरण 23 n पदों तक निम्न अनुक्रम का योगफल ज्ञात कीजिये।

9, 99, 999, 9999, ...

हल इस रूप में यह G.P. नही है। तथापि इसे निम्न रूप में रखकर G.P. से सम्बन्ध निरूपित किया जा सकता है।

$10-1, 10^2-1, 10^3-1, 10^4-1, \ldots, 10^n-1, \ldots$

लिखिये

$$S_n = (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + (10^4-1) + \ldots n \text{ पदों तक}$$

$$= (10 + 10^2 + 10^3 + \ldots n \text{ पदों तक}) - (1 + 1 + 1 + \ldots n \text{ पदों तक}$$

$$= \frac{10(10^n-1)}{(10-1)} - n$$

$$= \frac{10}{9}(10^n-1) - n.$$

उदाहरण 24 3 तथा 81 के बीच दो गुणोत्तर माध्य निकालिये।

हल माना कि G_1, G_2 दो गुणोत्तर माध्य 3 तथा 81 के बीच में हैं। इस प्रकार $3, G_1, G_2, 81$ G.P. में हैं। इसलिये

$81 = 3r^3$, जिससे $r = 3$

इस प्रकार $G_1 = ar = 9$, $G_2 = ar^2 = 27$.

अतः 3 तथा 81 के बीच दो गुणोत्तर माध्य 3 तथा 27 हैं।

प्रश्नावली 8.4

1. गुणोत्तर श्रेढ़ी $5 + 25 + 125 + \ldots$ का दसवाँ तथा n वाँ पद भी निकालिये।
2. उस G.P., का 12वाँ पद ज्ञात कीजिये, जिसका 8वाँ पद 192 तथा सार्वअनुपात 2 है।
3. किसी G.P. का 5वाँ, 8वाँ तथा 11वाँ पद p, q तथा s है, तो दिखाइये कि $q^2 = ps$
4. किसी G.P. का चौथा पद उसके दूसरे पद का वर्ग है तथा प्रथम पद -3 है तो 7वाँ पद ज्ञात कीजिये।

5. निम्न अनुक्रम का कौन सा पद

(a) 2, 8, 32, ... ; 131072 है

(b) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}$, ... ; 729 है

(c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots; \frac{1}{19683}$ है

6. x के किस मान के लिये संख्याएं $\frac{-2}{7}, x, \frac{-7}{2}$ G.P. में हैं।

निम्नलिखित गुणोत्तर श्रेढ़ी का योगफल निर्देशित पदों तक निकालिये।

7. $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \ldots;$ 10 पदों तक

8. .15, .015, .0015, ... ; 20 पदों तक

9. $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}$, ... ; n पदों तक

10. $1, -a, a^2, -a^3$, ... ; n पदों तक $(a \neq -1)$.

11. x^3, x^5, x^7, ... ; n पदों तक $(x \neq \pm 1)$.

12. 2, $\frac{-1}{2}$, $\frac{1}{8}$, ... ; 12 पदों तक

13. मान ज्ञात कीजिए $\sum_{k=1}^{11}(2+3^k)$.

14. किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के तीन पदों का योगफल $\frac{13}{12}$ है तथा उनका गुणनफल -1 है। पदों को ज्ञात कीजिये।

15. G.P. 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, ... के कितने पदों की आवश्यकता होगी ताकि योगफल $\frac{3069}{512}$ हो?

16. किसी G.P. के तीन पदों का योगफल 16 है तथा अगले तीन पदों का योग 128 है तो G.P. के प्रथम पद, सार्वअनुपात तथा n पदों का योगफल निकालिये।

17. किसी G.P. का प्रथम पद $a = 729$, 7वाँ पद 64 हैं तो S_7 ज्ञात कीजिये।

18. उस G.P. को ज्ञात कीजिये, जिसके प्रथम दो पदों का योगफल -4 है तथा 5वाँ पद तृतीय पद का 4 गुना है।

19. यदि किसी G.P. का 4था, 10वाँ, तथा 16वाँ पद क्रमशः x, y तथा z हैं। सिद्ध कीजिये कि x, y, z G.P. में हैं।

20. अनुक्रम 7, 77, 777, 7777, ... के n पदों का योग ज्ञात कीजिये।

21. ऐसे चार पद ज्ञात कीजिये जो G.P. में हों, जिसका तीसरा पद प्रथम पद से 9 अधिक हो तथा दूसरा पद चौथे पद से 18 अधिक हो।

22. यदि किसी G.P. का pवाँ, qवाँ तथा rवाँ पद क्रमशः a, b तथा c हो तो, सिद्ध कीजिये कि :

$$a^{q-r}\, b^{r-p}\, c^{p-q} = 1.$$

23. यदि किसी G.P. का प्रथम तथा nवाँ पद क्रमशः a तथा b हैं, एवं P, n पदों का गुणनफल हो तो सिद्ध कीजिए कि $P^2 = (ab)^n$

24. यदि a,b,c गुणोत्तर श्रेढ़ी में हों तो सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित भी गुणोत्तर श्रेढ़ी में होंगे।

(i) a^2, b^2, c^2 (ii) a^3, b^3, c^3 (iii) $a^2+b^2,\ ab+bc,\ b^2+c^2.$

25. यदि $a, b, c, d,$ G.P. में हों तो दिखाइये कि $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$

26. 1 और 256 के बीच 3 गुणोत्तर माध्य रखिये।

27. n का मान ज्ञात कीजिये ताकि $\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, a तथा b के बीच गुणोत्तर माध्य हो।

28. दो संख्याओं का योगफल उनके गुणोत्तर माध्य का 6 गुना है तो दिखाइये कि संख्यायें $3+2\sqrt{2} : 3-2\sqrt{2}$ अनुपात में हैं।

29. सिद्ध कीजियें कि दो दी हुई संख्याओं के बीच n गुणोत्तर माध्यों का गुणनफल उनके बीच एकमात्र गुणोत्तर माध्य का n घातांक होता है।

8.4.4 G.P. के अनन्त पदों का योग : आइये G.P. $1, \dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{9}, \ldots$ पर विचार करें:

यहाँ $a = 1, r = \dfrac{2}{3}$. हम पाते हैं

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right].$$

आइये $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ के व्यवहार पर विचार करें, जब n का मान बढ़ता जाता है :

n	1	5	10	20
$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	0.6667	0.1316872428	0.01734152992	0.00030072866

हम पाते हैं कि जैसे–जैसे n बड़ा से बड़ा होता जाता है, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ वैसे वैसे शून्य के निकट होता

जाता है। अर्थात n को जैसे जैसे बड़ा बनाते जायेंगे, $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ वैसे वैसे छोटा होता जायेगा। दूसरे शब्दों मे जब $n \to \infty$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$.

निष्कर्षतः हम पाते हैं कि $S_\infty = 3$.

अब गुणोत्तर श्रेढ़ी $a, ar, ar^2, \ldots$, में यदि सार्वअनुपात $|r| < 1$ हो तब

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$= \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}.$$

इस स्थिति में $r^n \to 0$ यदि $n \to \infty$ चूँकि $|r| < 1$. इसलिए

यदि $n \to \infty$ तब

$$S_n \to \frac{a}{1-r}$$

प्रतीक रूप में अनन्त तक योगफल को S_∞ या S. द्वारा निरूपित किया जाता है। इस प्रकार हम पाते हैं

$$S = \frac{a}{1-r}.$$

उदाहरणतः

(i) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

(ii) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots = \frac{1}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}.$

8.4.5 आवर्त्त दशमलव संख्याएं गुणोत्तर श्रेढ़ी के रूप में

अब हम, जब $|r| < 1$. हो तो गुणोत्तर श्रेढ़ी के अनन्त पदों तक योगफल की उपयोगिता पर विचार करेंगे। इसकी आवश्यकता, आवर्त्त दशमलव प्रसार में कुछ वास्तविक संख्याओं के विस्तार के अध्ययन में पड़ती है। आइये विचार करें : $0.\bar{3} = 0.3333\ldots$ को हम लिख सकते हैं

$$0.3333\ldots = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \ldots \qquad (1)$$

(1) का दाहिना पक्ष, जो एक अनन्त गुणोत्तर श्रेढ़ी का योगफल ही है, जिसमें $a = .3$, तथा

$r = 0.1$, जो कि 1 से छोटा है। तो योगफल क्या हुआ? यह $\frac{0.3}{1-0.1} = \frac{1}{3}$. और यह परिमेय संख्या है जो जब दशमलव में निरूपित किया जाता है तो $0.\bar{3}$ के रूप में व्यक्त होती हैं।

उदाहरण 25 अनन्त G.P. $5, \frac{20}{7}, \frac{80}{49}, \ldots$ का योगफल ज्ञात कीजिये।

हल यहाँ $a = 5$ तथा $r = \frac{4}{7} < 1$.

इस प्रकार $$S = \frac{5}{1-\frac{4}{7}} = \frac{35}{3}.$$

उदाहरण 26 G.P. $\frac{-3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{-3}{64}, \ldots$. का योगफल S ज्ञात कीजिये।

हल यहाँ $a = \frac{-3}{4}$, तथा $r = \frac{-1}{4}$ । पुनः $|r| < 1$.

इस प्रकार $$S = \frac{\frac{-3}{4}}{1-\left(\frac{-1}{4}\right)} = \frac{-3}{5}.$$

उदाहरण 27 सिद्ध कीजिए कि $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{8}} \ldots = 3$.

हल हम पाते हैं

$$3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{8}} \ldots = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots}$$

$$= 3^{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}} = 3,$$

चूँकि $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdots$ एक अनन्त गुणोत्तर श्रेणी है जिसका सार्वअनुपात $\frac{1}{2} < 1$ है।

उदाहरण 28 वह परिमेय संख्या बताइये जिसका दशमलव में विस्तार करने पर $0.23\bar{4}$ प्राप्त होता है।

हल हम लिखते हैं :

$$0.23\bar{4} = 0.23 + [0.004 + 0.0004 + 0.00004 + \ldots]$$

$$= 0.23 + \frac{0.004}{1-0.1},$$

चूँकि कोष्ठक की श्रेणी एक गुणोत्तर श्रेणी है, जिसका प्रथम पद 0.004 तथा सार्वअनुपात $0.1 < 1$ है। इसलिये

$$0.23\bar{4} = 0.23 + \frac{4}{900}$$

$$= \frac{211}{900}.$$

अतः $\frac{211}{900}$ ही वाँछित परिमेय संख्या है।

प्रश्नावली 8.5

निम्नलिखित गुणोत्तर श्रेढ़ीयों के अनन्त पदों तक योगफल ज्ञात कीजिये।

1. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$

2. 6, 1.2, .24, ...

3. 50, 42.5, 36.125, ...

4. 0.3, 0.18, 0.108, ...

5. 10, –9, 8.1, ...

निम्नलिखित में प्रत्येक के लिये बताइये कि यह किस परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार है?

6. $0.6\bar{8}$.

7. $.1\bar{5}$.

8. $0.\overline{712}$.

9. किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद 2 है तथा अनन्त तक योगफल 6 है, तो सार्वअनुपात ज्ञात कीजिये।

10. किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का सार्वअनुपात $-\frac{4}{5}$ है तथा अनन्त तक योग $\frac{80}{9}$ है तो प्रथम पद ज्ञात कीजिये।

11. निम्नलिखित श्रेणी का अनन्त तक योगफल ज्ञात कीजिये।

$(\sqrt{2}+1)+1+(\sqrt{2}-1)+\ldots$

12. यदि $x = 1 + a + a^2 + \ldots$ तथा $y = 1 + b + b^2 + \ldots$ जहाँ $|a| < 1$ तथा $|b| < 1$ तो

सिद्ध कीजिये कि $1 + ab + a^2b^2 + \ldots = \frac{xy}{x+y-1}$.

13. यदि अनन्त गुणोत्तर श्रेढ़ी का योग 15 है तथा पदों के वर्ग का योग 45 है, तो श्रेढ़ी ज्ञात कीजिये।

14. किसी अनन्त गुणोत्तर श्रेढ़ी के दो पदों का योग 15 है तथा प्रत्येक पद पिछले सभी पदों का योग हों तो श्रेढ़ी ज्ञात कीजिये।

15. दी गई श्रेणी का अनन्त तक योग ज्ञात कीजिये :

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\ldots$$

8.5 समान्तर–गुणोत्तर अनुक्रम

हम जानते हैं कि अनुक्रम

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ \ldots\ [a + (n-1)\, d\,],\ \ldots \qquad (1)$$

एक समान्तर अनुक्रम है, जिसका प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है। और अनुक्रम

$$1,\ r,\ r^2,\ \ldots\ r^{n-1},\ \ldots \qquad (2)$$

एक गुणोत्तर अनुक्रम है जिसका प्रथम पद 1 है तथा इसका सार्वअनुपात r हैं। (1) और (2) के संगत पदों का गुणा करने पर हमें निम्न अनुक्रम मिलता है:

$$a,\ (a + d)\, r,\ (a + 2d)\, r^2,\ldots,[a + (n-1)\, d]\, r^{n-1},\ldots$$

जिसे समान्तर–गुणोत्तर अनुक्रम कहा जाता है।

यहाँ हम इस अनुक्रम के n पदों का योग ज्ञात करने का सूत्र ज्ञात करेंगे।

$$S_n = a + (a + d)r + (a + 2d)r^2 + \ldots + [a + (n-1)d]r^{n-1}$$

ताकि $$rS_n = ar + (a + d)r^2 + (a + 2d)r^3 + \ldots + [a + (n-2)d]r^{n-1} + [a + (n-1)d]r^n.$$

घटाने पर हम पाते हैं

$$(1-r)\, S_n = a + dr + dr^2 + dr^3 \ldots + dr^{n-1} - [a + (n-1)d]r^n$$

$$= a + dr\left(\frac{1-r^{n-1}}{1-r}\right) - [a + (n-1)d]r^n$$

या $$S_n = \frac{a}{(1-r)} + \frac{dr(1-r^{n-1})}{(1-r)^2} - \frac{[a+(n-1)d]r^n}{(1-r)}$$

उस स्थिति में जिसमें $|r| < 1$, r^n तथा r^{n-1} दोनों शून्य की ओर जाते हैं जब $n \to \infty$.

इस प्रकार $$S = \frac{a}{(1-r)} + \frac{dr}{(1-r)^2}.$$

उदाहरण 29 निम्न श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिये।

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots, \text{ जबकि } |x| < 1.$$

हल दी गई श्रेणी समान्तर–गुणोत्तर श्रेणी है, जब कि A.P. का $a = 1$ तथा $d = 1$. तथा G.P. $1, x, x^2, \ldots$, है जिसका सार्वअनुपात x. हैं। हम लिखते हैं

$$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1}$$

इसलिये $\quad xS_n = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + (n-1)x^{n-1} + nx^n.$

घटाने पर,

$$(1 - x) S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} - nx^n$$

$$= \frac{1 - x^n}{(1 - x)} - nx^n$$

या

$$S_n = \frac{(1 - x^n)}{(1 - x)^2} - \frac{nx^n}{(1-x)}.$$

उदाहरण 30 निम्न श्रेणी का अनन्त तक योगफल निकालिये।

$$1 + \frac{2.1}{3} + \frac{3.1}{3^2} + \frac{4.1}{3^3} + \ldots$$

हल दी गई श्रेणी को इस प्रकार से लिख सकते हैं :

$$1 + 2.\frac{1}{3} + 3.\frac{1}{3^2} + 4.\frac{1}{3^3} + \ldots$$

स्पष्टतः यह समान्तर–गुणोत्तर श्रेणी है, जिसमें

$$a = 1, d = 1, r = \frac{1}{3}.$$

अतः सूत्र का उपयोग करने पर

$$S = \frac{a}{(1 - r)} + \frac{dr}{(1 - r)^2}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{9}{4}.$$

एवं वैकल्पिक विधि से, माना

$$S = 1 + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3^2} + 4 \times \frac{1}{3^3} + \ldots \quad (1)$$

ताकि

$$\frac{1}{3}S = \frac{1}{3} + 2\times\frac{1}{3^2} + 3\times\frac{1}{3^3} + \ldots \qquad (2)$$

(2) को (1) मे से घटाने पर, हम पाते हैं :

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)S = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots$$

या $$\frac{2}{3}S = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

इसलिये $$S = \frac{9}{4}.$$

प्रश्नावली 8.6

निम्नलिखित श्रेणी के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिये।

1. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\ldots$

2. $3+5\times\frac{1}{4}+7\times\frac{1}{4^2}+\ldots$

3. $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots$, जबकि $|x| < 1$.

4. $1 + 4x + 7x^2 + 10x^3 + \ldots$ जबकि $|x| < 1$.

5. प्रश्न 2 से 4 तक की श्रेणीयों का अनन्त तक योगफल ज्ञात कीजिये।

6. यदि श्रेणी के अनन्त पदों का योग

$3 + 5r + 7r^2 + \ldots$; $\frac{44}{9}$ है तो r ज्ञात कीजिये।

7. यदि श्रेणी $3 + (3 + d)\frac{1}{4} + (3 + 2d)\frac{1}{4^2} + \ldots$ के अनन्त पदों तक का योगफल $\frac{44}{9}$ है तो d का मान ज्ञात कीजिये।

8.6 विशेष अनुक्रमों के n पदों तक योग निकालना।

अब हम कुछ विशेष अनुक्रमों के n पदों का योग निकालेंगे : वे निम्न हैं

(i) $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ (प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग)

(ii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ (प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग)

(iii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ (प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनों का योग)

आइये एक–एक पर विचार करें :

(i) $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{(भाग 8.3.2 को देखें)}$$

(ii) यहाँ $S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

हम निम्न सर्वसमिका

$$k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1.$$

पर विचार करते हैं

क्रमशः $k = 1, 2, \ldots, n$ रखने पर हम पाते हैं

$$1^3 - 0^3 = 3(1)^2 - 3(1) + 1$$

$$2^3 - 1^3 = 3(2)^2 - 3(2) + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3(3)^2 - 3(3) + 1$$

- - - - -

- - - - -

$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n)^2 - 3(n) + 1.$$

दोनों पक्षों को जोड़ने पर हम पाते हैं

$$n^3 - 0^3 = 3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2) - 3(1+2+3+\ldots+n) + n$$

या
$$n^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + n$$

(i) से हम जानते हैं

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

अतः
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left[n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left(2n^3 + 3n^2 + n\right)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(iii) यहाँ $S_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.

हम सर्वसमिका

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1,$$

पर विचार करते हैं

क्रमशः $k = 1, 2, 3, \ldots n$ रखने पर हम पाते हैं

$$2^4 - 1^4 = 4(1)^3 + 6.1^2 + 4.1 + 1$$

$$3^4 - 2^4 = 4.2^3 + 6.2^2 + 4.2 + 1$$

$$4^4 - 3^4 = 4(3)^3 + 6.3^2 + 4.3 + 1$$

- - - - -

- - - - -

$$(n-1)^4 - (n-2)^4 = 4(n-2)^3 + 6(n-2)^2 + 4(n-2) + 1$$

$$n^4 - (n-1)^4 = 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1$$

$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.$$

दोनों पक्षों को जोड़ने पर हम पाते हैं

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3) + 6(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2) + 4(1+2+3+\ldots+n) + n$$

$$= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n$$

या $$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = (n+1)^4 - 1 - 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k - n. \quad (1)$$

(i) तथा (ii) से हम जानते हैं

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

तथा $$\sum^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{}$$

या $$4\,S_n = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - n(2n^2 + 3n + 1) - 2n(n + 1) - n$$
$$= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - 2n^3 - 3n^2 - n - 2n^2 - 2n - n$$
$$= n^4 + 2n^3 + n^2$$
$$= n^2(n^2 + 2n + 1)$$
$$= n^2(n+1)^2$$

अतः $$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{[n(n+1)]^2}{4}.$$

उदाहरण 31 श्रेणी 5+11+19+29+41+... के n पदों का योग ज्ञात कीजिये।

हल आइये लिखें :

$$S = 5 + 11 + 19 + 29 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$
$$S = \quad 5 + 11 + 19 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

घटाने पर हम पाते हैं :

$$0 = 5 + [6 + 8 + 10 + 12 + \ldots (n-1) \text{ पदों}] - a_n$$

या $$a_n = 5 + \frac{(n-1)}{2}\,[12 + 2(n-2)]$$
$$= 5 + (n-1)(n+4)$$
$$= n^2 + 3n + 1.$$

इस प्रकार $$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (k^2 + 3k + 1)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} + n.$$

अतः $$S_n = \frac{n}{3}(n+2)(n+4)$$

$$= n(n^2 + 5n + 4)$$

$$= n^3 + 5n^2 + 4n.$$

इस प्रकार n पदों तक योगफल

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^3 + 5\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{5n}{6}(n+1)(2n+1) + \frac{4n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[3n(n+1) + 10(2n+1) + 24]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}(3n^2 + 23n + 34).$$

उदाहरण 33 $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2$, का मान ज्ञात कीजिये।

हल हम पाते हैं

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2$$

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2n)^2 - [2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2]$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n}{3}(2n+1)(2n-1).$$

प्रश्नावली 8.7

निम्न श्रेणी के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिये :

1. $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots$

2. $3.1^2 + 5.2^2 + 7.3^2 + \ldots$

3. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots$

4. $5^2 + 6^2 + 7^2 + \ldots + 20^2$

5. $3.8 + 6.11 + 9.14 + \ldots$

6. $1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \ldots$

उस श्रेढ़ी के n पदों का योग ज्ञात कीजिये जिसका n वाँ पद निम्न है:

7. $n(n + 3)$.

8. $n^2 + 2^n$.

8.7 हरात्मक श्रेढ़ी (H.P.)

एक श्रेढ़ी $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ को हरात्मक श्रेढ़ी कहते हैं, यदि

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \ldots$$

एक समान्तर श्रेढ़ी है, उदाहरणतः

(i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots$ (ii) $\frac{1}{4}, 1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{5}, \frac{-1}{8}, \ldots$ (iii) $\frac{1}{a}, \frac{1}{(a+d)}, \frac{1}{(a+2d)}, \ldots$

हरात्मक श्रेढ़ियाँ हैं। इस प्रकार प्रत्येक हरात्मक श्रेढ़ी के संगत एक समान्तर श्रेढ़ी है और इसका विलोम भी सही है। अतः हरात्मक श्रेढ़ी की प्रत्येक समस्या (योगफल के अतिरिक्त) को संगत समान्तर श्रेढ़ी द्वारा हल किया जा सकता हैं।

8.7.1 हरात्मक माध्य (H.M.)

जब तीन संख्याएं a, H, b H.P. में हो तो H को a, b का हरात्मक माध्य कहा जाता है। यदि a, H, b H.P. में हों तो $\frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b}$ A.P. में होंगे अर्थात्

$$\frac{1}{H} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{H}$$

या $$\frac{2}{H} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

या $$H = \frac{2ab}{(a+b)},$$

अतः a तथा b के बीच वाँछित हरात्मक माध्य $\frac{2ab}{(a+b)}$ है।

8.8 दो धनात्मक वास्तविक संख्याओं के A.M., G.M. तथा H.M. में परस्पर सम्बन्ध

माना कि A, G तथा H दो धनात्मक वास्तविक संख्याओं a तथा b के बीच क्रमशः A.M., G.M. तथा H.M. हैं। यदि G को धनात्मक लें तो

$$A = \frac{a+b}{2},\ G = \sqrt{ab} \text{ और } H = \frac{2ab}{(a+b)}.$$

इस प्रकार

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$$

$$= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0 \qquad (1)$$

तथा

$$G - H = \sqrt{ab} - \frac{2ab}{(a+b)}$$

$$= \sqrt{ab}\,\frac{(a+b-2\sqrt{ab})}{(a+b)}$$

$$= \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(a+b)} \geq 0. \qquad (2)$$

(1) तथा (2) से हमें इनका परस्पर सम्बन्ध $A \geq G \geq H$ मिलता है

उदाहरण 34 किसी हरात्मक श्रेढ़ी का तीसरा तथा 7वाँ पद क्रमशः $\frac{1}{12}$ तथा $\frac{1}{32}$ हों तो उसका 15वाँ पद ज्ञात कीजिये।

हल हरात्मक श्रेढ़ी की परिभाषा से12 तथा 32 संगत समान्तर श्रेढ़ी का तीसरा तथा 7वाँ पद है। इस प्रकार

$$12 = a + (3-1)\,d = a + 2d$$

तथा

$$32 = a + (7-1)\,d = a + 6d.$$

इन समीकरणों को हल करने पर $a = 2$, तथा $d = 5$ मिलता है। इस प्रकार A.P. का वाँछित 15वाँ पद निम्न होगा

$$a_{15} = a + (15-1)\,d$$

$$= 2 + 14 \times 5$$

$$= 72.$$

अतः हरात्मक श्रेढ़ी का 15वाँ पद $\frac{1}{72}$ है।

उदाहरण 35 किन्हीं दो संख्याओं के बीच समान्तर माध्य 27 तथा हरात्मक माध्य 12 हों तो उनका गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिये।

हल माना कि a तथा b दी गई संख्याएं हैं, तो

$$\text{A.M.} = \frac{a+b}{2} = 27. \tag{1}$$

$$\text{H.M.} = \frac{2ab}{(a+b)} = 12. \tag{2}$$

(1) तथा (2) से हम पाते हैं $ab = 324$

अतः $\text{G.M.} = \sqrt{ab} = \sqrt{324} = 18.$

प्रश्नावली 8.8

1. वह हरात्मक श्रेढ़ी ज्ञात कीजिये, जिसका तीसरा एवं 14वाँ पद क्रमशः $\frac{6}{7}$ तथा $\frac{1}{3}$ है।

2. किसी हरात्मक श्रेढ़ी का mवाँ पद n है तथा nवाँ पद m है, तो सिद्ध कीजिये कि pवाँ पद $\frac{mn}{p}$ है।

3. एक हरात्मक श्रेढ़ी में, यदि pवाँ पद qr, qवाँ पद pr है। तो सिद्ध कीजिये कि r वाँ पद pq है।

4. यदि किसी हरात्मक श्रेढ़ी का pवाँ, qवाँ तथा rवाँ पद क्रमशः a, b, c हो तो, सिद्ध कीजिये कि $\frac{q-r}{a} + \frac{r-p}{b} + \frac{p-q}{c} = 0$.

5. यदि दो संख्याओं के बीच हरात्मक एवं समान्तर माध्य क्रमशः 3 तथा 4 हों तो संख्याओं को ज्ञात कीजिये।

6. यदि a, b, c हरात्मक श्रेढ़ी में हों तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{(b-a)} + \frac{1}{(b-c)} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}$.

8.9 उपयोगिता

इस अनुभाग में समान्तर एवं गुणोत्तर श्रेढ़ी के मूलभूत सिद्धान्तों की, दैनिक जीवन में आने वाली समस्याओं में उपयोगिता पर विचार करेंगे।

उदाहरण 36 एक व्यक्ति ऋण का भुगतान 100 रु. की प्रथम किश्त देकर करता है। यदि वह प्रत्येक किस्त में 5 रु. प्रतिमाह बढ़ाता है तो 30वीं किश्त की राशि क्या होगी?

हल स्पष्टतः किश्तें एक समान्तर श्रेढ़ी की रचना करती है, जिसका प्रथम पद $a = 100$, सार्वअन्तर $d = 5.$ है। इसलिये A.P. का 30वाँ पद

$$a_{30} = a + (30 - 1)\,d$$
$$= 100 + 29 \times 5 = 100 + 145 = 245.$$

इस प्रकार 30वीं किश्त की राशि 245 रु. है।

उदाहरण 37 एक बहुभुज के अन्तः कोण समान्तर श्रेढ़ी में हैं। सबसे छोटा कोण 120^0 है तथा सार्वअन्तर 5^0. है, तो बहुभुज की भुजाओं की संख्या बताइये।

हल माना कि बहुभुज की भुजाओं की संख्या n है। स्पष्टतः अन्तः कोण एक A.P. की रचना करते हैं, जिसका प्रथम पद $a = 120$ तथा सार्वअन्तर $d = 5$. है सूत्र का उपयोग करने पर

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2a + (n-1)\,d]$$
$$= \frac{n}{2}\,[2 \times 120 + (n-1)\,5]. \qquad (1)$$

चूँकि S_n, n भुजाओं वाले बहुभुज के अन्तः कोणो का योग है, अतः

$$S_n = (n-2) \times 180. \qquad (2)$$

(1) तथा (2) से हम पाते हैं

$$\frac{n}{2}\,[240 + 5n - 5] = (n-2) \times 180$$

या $\qquad n^2 - 25n + 144 = 0$

या $\qquad (n-16)\,(n-9) = 0.$

इससे $n = 9$ या 16. परन्तु $n = 16$ मान सम्भव नहीं है क्योकि यह A.P. का अन्तिम पद

$$= a + (n-1)\,d = 120 + (16-1) \times 5$$
$$= 195°,$$

देता है, जो मान्य नहीं है, क्योंकि किसी भी बहुभुज का अन्तःकोण 180° से अधिक नहीं हो सकता। अतः $n = 9$ ही सही उत्तर है। अर्थात भुजाओं की संख्या 9 है।

उदाहरण 38 एक शतंरज के बोर्ड के एक वर्ग में, चावल का एक दाना, दूसरे वर्ग में दो दानें, तीसरे में 4 दानें आदि, प्रत्येक अगले वर्ग में चावल के दानों को दुगुना करके रखते जाते हैं। इस प्रकार यदि वर्गों की संख्या 64 हो तो इन वर्गों को भरने के लिए कितने चावल के दानों की आवश्यकता होगी।

हल समस्या के अनुसार प्रथम वर्ग पर। दाना, द्वितीय वर्ग पर 2 दानें, तृतीय पर 2^2 दानें, चतुर्थ पर 2^3 दानें आदि। अतः इससे हमको एक गुणोत्तर श्रेढ़ी $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots$ प्राप्त होती है, जिसका

योग 64 पदों तक निकालना है, और यही वांछित दानों की संख्या होगी। G.P. के योग का सूत्र उपयोग करने पर

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}.$$

यहाँ $a = 1, r = 2$ तथा $n = 64$.

अतः $S_n = 2^{64}-1$ जो कुल दानों की वांछित संख्या है।

उदाहरण 39 एक व्यक्ति जो मासिक वेतन पर रखा गया है तथा प्रत्येक अगले माह में उसका वेतन, विगत माह से 10 वाँ भाग कम हो जाता है। यदि प्रथम माह में उसे 5000 रु. मिला, तो सिद्ध कीजिये कि उसे जीवन में, 50000 रु. से अधिक प्राप्त नहीं होगा।

हल प्रथम माह में उसे प्राप्त राशि = 5000 रु.

द्वितीय माह में प्राप्त राशि $= 5000-\frac{1}{10}(5000)$ रु

$= 4500$ रु.

तृतीय माह में प्राप्त राशि $= \left[4500-\frac{1}{10}(4500)\right]$ रु

$= 4050$ रु.

चतुर्थ माह में प्राप्त राशि $= \left[4050-\frac{1}{10}(4050)\right]$ रु

$= 3645$ रु आदि

इस प्रकार हमें मासिक भुगतान का अनुक्रम 5000, 4500, 4050, 3645, ... प्राप्त होता है जो G.P. में है, जिसका प्रथम पद $a = 5000$ तथा सार्वअनुपात $r = \frac{9}{10} < 1$.

अतः $S = \frac{a}{1-r} = \frac{5000}{1-\frac{9}{10}} = 50000$.

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि, व्यक्ति चाहे जितने वर्ष जीवित रहे किन्तु 50000 रु से अधिक नहीं प्राप्त कर सकता।

प्रश्नावली 8.9

1. एक किसान पुराना ट्रैक्टर 12,000 रु. में खरीदता है। वह नकद 6000 रु. देता है तथा यह वादा करता है कि रकम को 500 रु. वार्षिक किश्त तथा शेष राशि पर 12% व्याज की दर से भुगतान करेगा। किसान को ट्रैक्टर की कितनी कीमत देनी पड़ेगी?

2. हरि 22000 रुपये में एक स्कूटर खरीदता है। वह 4000 रु. नकद देता है तथा यह वादा करता है कि शेष रकम को 1000 रु. वार्षिक किश्त तथा शेष राशि पर 10% ब्याज देगा। उसे स्कूटर के लिये कितनी राशि चुकानी पड़ी?

3. किसी कक्षा के विद्यार्थियों की आयु समान्तर श्रेढ़ी में है जिसका सार्वअन्तर 4 माह है। यदि सबसे छोटा विद्यार्थी 8 वर्ष का है तथा सभी की आयु का योग 168 वर्ष हो तो कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या बताइये।

4. एक व्यक्ति अपने चार मित्रों को पत्र लिखता है। वह प्रत्येक को उसकी नकल करके चार दूसरे व्यक्तियों को भेजने का निर्देश देता है, तथा उनसे यह भी करने को कहता है कि प्रत्येक पत्र प्राप्त करने वाला व्यक्ति इस श्रृंखला को जारी रखें। यह कल्पना करके कि श्रृंखला न टूटें तो 8 वें पत्रों के समूह भेजे जाने तक कितना डाक खर्च पड़ेगा जबकि एक पत्र का दाम 50 पैसे हैं।

5. एक पौधे की ऊँचाई किसी निश्चित तिथि को 1.6 मीटर है। यदि अगले वर्ष यह 5 से0 मी0 बढ़ जाती है तथा वृद्धि अगले वर्षो मे विगत की अपेक्षा आधी हो, तो सिद्ध कीजिये कि उसकी ऊँचाई 1.7 मीटर से अधिक कभी नहीं होगी।

6. एक व्यक्ति ने एक बैंक में 10,000 रु. 5% साधारण ब्याज पर रखा। जब से रकम बैंक में रखी गई, 15 वें वर्ष मे उसके खाते में कितनी रकम हो गई, तथा 20 वर्षो बाद कुल कितनी रकम हो गई, ज्ञात कीजिये।

7. 500 रु. धनराशि 10% वार्षिक चक्रबृद्धि ब्याज पर 10 वर्षो बाद कितनी हो जायेगी, ज्ञात कीजिये?

8. बैक्टीरिया कल्चर में बैक्टीरिया की संख्या प्रत्येक घण्टे पश्चात दूनी हो जाती है। यदि प्रारम्भ में उसमें 30 बैक्टीरिया उपस्थित थे, तो बैक्टीरिया की संख्या दूसरे, चौथे तथा n वें घण्टों बाद क्या होगी?

विविध उदाहरण

उदाहरण 40 यदि एक गुणोत्तर श्रेढ़ी का mवाँ, nवाँ तथा pवाँ पद एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के तीन क्रमागत पद हो, तो सिद्ध कीजिये कि m, n तथा p समान्तर श्रेढ़ी के तीन क्रमागत पद होंगे।

हल दिया हुआ है कि
$$a_m = ar^{m-1}$$
$$a_n = ar^{n-1}$$
$$a_p = ar^{p-1},$$

जबकि a, G.P. का प्रथम पद है, तथा सार्वअनुपात r है, और यह भी दिया है कि a_m, a_n, a_p एक G.P. की रचना करते हैं। इसलिये

$$\frac{a_n}{a_m} = \frac{a_p}{a_n}$$

या $$\frac{ar^{n-1}}{ar^{m-1}} = \frac{ar^{p-1}}{ar^{n-1}}$$

अर्थात $$r^{2n-2} = r^{p+m-2}$$

इससे हमें मिलता है

$2n = p + m$ या $n - m = p - n$ जो दर्शाता है कि m, n तथा p, A.P. के तीन क्रमागत् पद हैं।

उदाहरण 41 यदि a, b, c G.P. मे हों तथा $a^x = b^y = c^z$, तो सिद्ध कीजिये कि x, y, z हरात्मक श्रेढ़ी में हैं।

हल माना कि $a^x = b^y = c^z = k$ है तो

$$a = k^{\frac{1}{x}},\ b = k^{\frac{1}{y}} \text{ तथा } c = k^{\frac{1}{z}}. \qquad (1)$$

चूँकि a, b, c G.P., में हैं, अतः

$$b^2 = ac \qquad (2)$$

(1) तथा (2) के प्रयोग से हम पाते हैं

$$k^{\frac{2}{y}} = k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}$$

या $$\frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{x+z}{xz} \qquad (2)$$

या $$y = \frac{2xz}{(x+z)}.$$

अतः x, y तथा z H.P. में हैं।

उदाहरण 42 दो धनात्मक संख्याओं a तथा b, जबकि $a > b$, के समान्तर माध्य उनके गुणोत्तर माध्य का दूना है, तो सिद्ध कीजिये कि $a : b = (2+\sqrt{3}) : (2-\sqrt{3})$

हल दिया है कि A.M. = 2 (G.M.). हम पाते हैं,

$$\frac{a+b}{2} = 2\sqrt{ab}$$

या $$\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} = \frac{2}{1}.$$

योगान्तरानुपात के उपयोग से हम पाते हैं :

$$\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}} = \frac{3}{1}$$

अर्थात् $$\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)^2$$

या $$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{3}}{1}.$$

पुनः योगान्तरानुपात को अपनाने से, हम पाते है :

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{\mathbf{b}}-\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

अर्थात् $$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \text{ या } \frac{a}{b}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)^2}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

अतः $a:b=(2+\sqrt{3}):(2-\sqrt{3})$.

उदाहरण 43 दिखाइये कि $\dfrac{1\times 2^2+2\times 3^2+...+n\times(n+1)^2}{1^2\times 2+2^2\times 3+...+n^2\times(n+1)}=\dfrac{3n+5}{3n+1}$.

हल बाम पक्ष के अंश का nवाँ पद $= n(n+1)^2$

$= n^3+2n^2+n.$

इसी प्रकार बाम पक्ष के हर का nवाँ पद $= n^2(n+1) = n^3+n^2.$

इस प्रकार सिग्मा (Σ) का प्रयोग करने पर, हम पाते हैं,

$$\text{बाम पक्ष} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(k^3+2k^2+k)}{\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2)}=\frac{\sum_{k=1}^{n}k^3+2\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k}{\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}k^2} \quad (1)$$

हम जानते हैं कि $\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$; $\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{k=1}^{n}k^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

इसलिये

$$\text{बाम पक्ष} = \frac{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}+\dfrac{1}{3}n(n+1)(2n+1)+\dfrac{n(n+1)}{2}}{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}+\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$= \frac{n(n+1)\left[\frac{n(n+1)}{4}+\frac{(2n+1)}{3}+\frac{1}{2}\right]}{n(n+1)\left[\frac{n(n+1)}{4}+\frac{(2n+1)}{6}\right]}$$

$$= \frac{3n^2+11n+10}{3n^2+7n+2} = \frac{(3n+5)(n+2)}{(n+2)(3n+1)}$$

$$= \frac{3n+5}{3n+1} = \text{दक्षिण पक्ष}$$

उदाहरण 44 यदि p, q, r G.P. में हों तथा समीकरण $px^2 + 2qx + r = 0$ और समीकरण $dx^2 + 2ex + f = 0$ एक उभयनिष्ट मूल रखते हों, तो दिखाइये कि $\frac{d}{p}, \frac{e}{q}, \frac{f}{r}$ A.P. में हैं।

हल समीकरण $px^2 + 2qx + r = 0$ के मूल निम्न हैं

$$x = \frac{-2q \pm \sqrt{4q^2 - 4rp}}{2p}.$$

चूँकि p, q, r G.P. में हैं तो $q^2 = pr$. अर्थात $x = -\frac{q}{p}$.

परन्तु $\frac{-q}{p}$ समीकरण $dx^2 + 2ex + f = 0$. का भी मूल है, अतः

$$d\left(\frac{-q}{p}\right)^2 + 2e\left(\frac{-q}{p}\right) + f = 0$$

अर्थात् $dq^2 - 2eqp + fp^2 = 0$, इसको pq^2 से भाग देने पर तथा $q^2 = pr$, का उपयोग करने से हम पाते हैं

$$\frac{d}{p} - \frac{2e}{q} + \frac{fp}{pr} = 0$$

या $$\frac{d}{p} - \frac{2e}{q} + \frac{f}{r} = 0$$

अतः $$\frac{d}{p}, \frac{e}{q}, \frac{f}{r} \text{ A.P. में हैं।}$$

उदाहरण 45 निम्न श्रेणी का योगफल निकालिये।

$$\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \ldots n \text{ पदों तक।}$$

हल हम पाते हैं कि

$$S_n = \frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)},$$

जिससे मिलता है

$$3S_n = \left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$= 1-\frac{1}{(3n+1)}=\frac{3n}{3n+1}$$

अतः $S_n = \frac{n}{(3n+1)}$.

अध्याय 8 पर विविध प्रश्नावली

1. उस A.P. का 25वाँ पद ज्ञात कीजिये, जिसका 9वाँ पद -6 है तथा सार्वअन्तर $\frac{5}{4}$ है।

2. अनुक्रम $-12, -9, -6, -3, \ldots$ के कितने पदों की आवश्यकता होगी, ताकि योगफल 54 हो?

3. दिखाइये कि किसी A.P. के $(m + n)$ वें तथा $(m - n)$ वें पदों का योग m वें पद का दूना है।

4. यदि किसी A.P. के तीन पदो का योग 24 है तथा उनका गुणनफल 440, है तो संख्यायें बताइये।

5. माना कि किसी A.P. के n, $2n$ तथा $3n$ पदों का योगफल क्रमशः S_1, S_2 तथा S_3, है तो दिखाइये कि $S_3 = 3(S_2 - S_1)$.

6. 200 तथा 400 के मध्य आने वाले उन सभी संख्याओं का योगफल निकालिये जो 7 से विभाजित हो।

7. 3 और 17 के मध्य n समान्तर माध्य हैं। यदि अन्तिम माध्य एवं प्रथम माध्य का अनुपात 3:1. हो तो n का मान निकालिये।

8. G.P. के कुछ पदों का योग 315 है, उसका प्रथम पद तथा सार्वअनुपात क्रमशः 5 तथा 2, है। अन्तिम पद, तथा पदों की संख्या बताइए।

9. किसी G.P. का प्रथम पद 1. है। तीसरे एवं पाँचवें पदों का योग 90 हो तो G.P. का सार्वअनुपात बताइए।

10. किसी G.P. के तीन पदों का योग 56 है। यदि हम क्रम से इन संख्याओं में से 1, 7, 21 घटायें तो हमें एक समान्तर श्रेढ़ी प्राप्त होती है। संख्या ज्ञात कीजिए।

11. किसी G.P. में S, n पदों का योग, P उनका गुणनफल तथा R उनके व्युत्क्रमों का योग हो तो सिद्ध कीजिए कि $P^2 R^n = S^n$.

12. यदि a, b, c, d G.P., में हों तो सिद्ध कीजिये कि $(a^n + b^n), (b^n + c^n), (c^n + d^n)$ G.P. में हैं।

13. एक निर्माता घोषित करता है कि उसकी मशीन जिसका क्रयमूल्य 15625 रु. है हर वर्ष उसका मूल्य 20%.की दर से घटता जाता है। उसका मूल्य 5 वर्ष के बाद क्या होगा?

14. यदि A तथा G दो धनात्मक संख्याओं के बीच क्रमशः A.M. एवं G.M. हों तो सिद्ध कीजिये कि संख्यायें $A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)}$ हैं।

15. माना कि दो धनात्मक संख्याओं a तथा b के बीच A.M. और G.M. का अनुपात $m : n$ है। दिखायें कि $a:b = (m+\sqrt{m^2-n^2}):(m-\sqrt{m^2-n^2})$.

16. यदि b तथा c के मध्य दो गुणोत्तर माध्य G_1 तथा G_2 हों तथा a उनका समान्तर माध्य हो तो दिखाइये कि $G^3_1 + G^3_2 = 2abc$.

17. यदि दो संख्याओं a तथा b के बीच गुणोत्तर माध्य G हो तथा उनके बीच दो समान्तर माध्य p तथा q हों तो सिद्ध कीजिये कि $G^2 = (2p-q)(2q-p)$.

18. यदि a, b, c A.P. में, b, c, d G.P. में तथा $\frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \frac{1}{e}$ A.P. में हों तो सिद्ध कीजिये कि a, c, e G.P. में हैं।

19. यदि किसी A.P. तथा G.P. का pवाँ, qवाँ तथा rवाँ पद क्रमशः a, b, c, हो तो सिद्ध कीजिये कि $a^{b-c}\, b^{c-a}\, c^{a-b} = 1$.

20. यदि a, b धनात्मक संख्यायें हों, तथा A, G, H क्रमशः a तथा b के बीच समान्तर, गुणोत्तर तथा हरात्मक माध्य हों तो दिखाइये कि A,G,H एक गुणोत्तर श्रेढ़ी की रचना करते हैं।

21. अनुक्रम 7, 7.7, 7.77, 7.777, ...के 50 पदों का योग ज्ञात कीजिये।

22. निम्नलिखित श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिये।

(i) 5 + 55 + 555 + ...   (ii) .6 + .66 + .666 + ...

23. श्रेणी, $x(x + y) + x^2(x^2 + y^2) + x^3(x^3 + y^3) + \ldots$ का योग निकालिये जबकि $|x| < 1$ हो तथा $|y| < 1$ हो,

24. एक वर्ग की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से एक वर्ग बनाया जाता है। दूसरे वर्ग के भीतर उसी तरह तीसरा वर्ग बनाया जाता है, और यह क्रिया सतत चलती रहती है। यदि प्रथम वर्ग की भुजा 16 से मी हो तो सभी वर्गों के क्षेत्रफलों का योग निकालिये।

25. एक समत्रिबाहु त्रिभुज की भुजा 24 से मी है। उसकी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाकर दूसरा त्रिभुज, इसी प्रकार दूसरे से तीसरा त्रिभुज, और यह क्रिया सतत चलती रहती है। ऐसे बने सभी त्रिभुजों की परिमिति का योग निकालिये।

26. यदि S_1, S_2, S_3 क्रमशः प्रथम प्राकृत संख्याओं का योग, उनके वर्गों का योग, उनके घनों का योग हों तो दिखाइये कि $9\,S_2^2 = S_3\,(1 + 8\,S_1)$.

27. श्रेणी $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\ldots$ के अनन्त पदों का योग निकालिये।

28. श्रेणी $3 + 7 + 13 + 21 + 31 + \ldots$ के n पदों का योग निकालिये।

29. निम्नलिखित श्रेणी के n पदों का योग निकालिये।

$$\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+\ldots$$

30. एक कीड़ा एक निश्चित बिन्दु से सीधे चलता है और प्रथम सेकेण्ड में एक मि.मी. चलता है तथा अगले सेकेण्ड में पिछली दूरी की आधी दूरी तय करता है। वह कितने समय में प्रारम्भिक बिन्दु से 3 मि.मी. दूरी तय करेगा?

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

इस बात के प्रमाण मिलते हैं कि 4000 वर्ष पूर्व बेबीलोनिया के निवासियों को समान्तर तथा गुणोत्तर अनुक्रमों का ज्ञान था। बोइथियस (510 A.D.) के अनुसार समान्तर, गुणोत्तर तथा हरात्मक अनुक्रमों की जानकारी प्रारम्भिक ग्रीक लेखकों को थी। भारतीय गणितज्ञों में से आर्यभट (476 ई.) ने पहली बार प्राकृत संख्याओं के वर्गों, तथा घनों का योग अपनी प्रसिद्ध पुस्तक "आर्यभट्टीय", जो लगभग 499 ई. में लिखी गई थी, में दिया। उन्होंने pवाँ पद से आरम्भ, समान्तर अनुक्रम के n पदों के योग का सूत्र भी दिया। अन्य महान भारतीय गणितज्ञ ब्रह्मगुप्त (598 ई.), महावीर (850 ई.) तथा भास्कर (1114–1185 ई.), ने संख्याओं के वर्गों एवम् घनों के योग पर विचार किया। एक दूसरे बिशिष्ट प्रकार का अनुक्रम जो "फिबोनासी अनुक्रम" कहलाता है, जिसका आविष्कार इटली के महान गणितज्ञ लियोनार्डो फिबोनासी (1170–1250 ई.) ने किया। इस अनुक्रम का गणित में व्यापक उपयोग है। फ्रांस के गणितज्ञ 'फ्रांक्वायस विपटा' (1540–1603 ई.) ने अनन्त गुणोत्तर श्रेणी की चर्चा की और इसके योग के लिए व्यापक व्यंजक भी दिया। सत्रहवीं शताब्दी में श्रेणियों का वर्गीकरण हुआ। 1671 ई. में जेम्स ग्रेगरी ने अनन्त अनुक्रमों की चर्चा की। बीजगणितीय तथा समुच्चय सिद्धान्तों के समुचित विकास के उपरान्त ही अनुक्रम तथा श्रेणियों से सम्बन्धित जानकारी अच्छे ढंग से प्रस्तुत हो सकी।

त्रिकोणमितीय फलन (TRIGONOMETRIC FUNCTIONS)

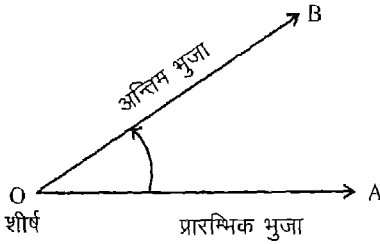
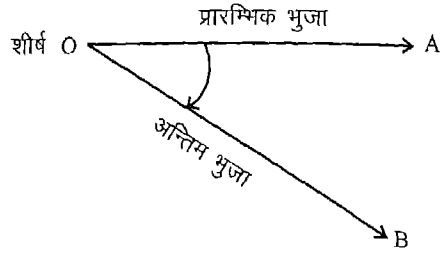
अध्याय 9

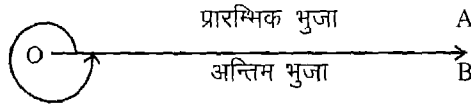
9.1 भूमिका

शब्द 'ट्रिगोनोमेट्री' की व्युत्पत्ति ग्रीक शब्दों 'ट्रिगोन' तथा 'मेट्रान' से हुई है तथा इसका अर्थ होता है "त्रिभुज की भुजाओं को मापना"। इस विषय का विकास मूलतः त्रिभुजों से सम्बंधित ज्यामितीय समस्याओं को हल करने के लिए किया गया था। इसका अध्ययन समुद्री यात्राओं के कप्तानों, सर्वेयरों, जिन्हें नये भू–भागों का चित्र तैयार करना होता था तथा अभियन्ताओं आदि के द्वारा किया गया। वर्तमान समय में इसका उपयोग बहुत सारे क्षेत्रों यथा विज्ञान, भूकम्पशास्त्र, विद्युत सर्किट के डिजाइन तैयार करने, अणु की अवस्था को वर्णन करने, समुद्र में, आने वाले ज्वार (tide) की ऊचाँई के विषय में पूर्वानुमान लगाने में, सांगीतिक टोन का विश्लेषण करने, और दूसरे क्षेत्रों में होता है।

पिछली कक्षाओं में हमने न्यून कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात के विषय में अध्ययन किया है जिसे समकोणीय त्रिभुजों की भुजाओं के अनुपात के रूप में बताया गया है। हमने त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं तथा उनके त्रिकोणमितीय अनुपातों के अनुप्रयोगों को "ऊँचाई एवं दूरियाँ" के प्रश्नों को हल करने में किया है। इस अध्याय में हम त्रिकोणमितीय अनुपातों के सम्बधों का त्रिकोणमितीय फलनों (वृत्तीय फलनों) के रूप में व्यापकीकरण करेंगे तथा उनके गुणधर्मो का अध्ययन करेंगे।

9.2 कोण

एक कोण वह आकृति है जो एक किरण के, उसके प्रारम्भिक बिन्दु के परितः घूमने पर बनती है। किरण के घूर्णन की मूल स्थिति को प्रारम्भिक भुजा तथा घूर्णन के अन्तिम स्थिति को कोण की अन्तिम भुजा कहते हैं। घूर्णन बिन्दु को शीर्ष कहते हैं। यदि घूर्णन की दिशा वामावर्त है, तो कोण धनात्मक कहलाता है और यदि घूर्णन दक्षिणावर्त है तो कोण ऋणात्मक कहलाता है आकृति 9.1 देखिये।

आकृति 9.1

किसी कोण का माप घुमाव की वह मात्रा है जो भुजा को प्रारम्भिक स्थिति से अन्तिम स्थिति तक घुमाने पर प्राप्त होता है। कोण को मापने के लिये अनेक इकाईयाँ हैं। कोण की परिभाषा इसकी इकाई का संकेत देती है, उदाहरण के लिये प्रारम्भिक रेखा की स्थिति से एक पूर्ण घुमाव, आकृति 9.2 में दर्शाया गया है :

आकृति 9.2

यह सर्वदा बड़े कोणों के लिये सुविधाजनक है। उदाहरणतः एक तेज गति से घूमने वाली पहिया द्वारा एक सेकण्ड में बनाये गये कोण की माप के लिए यह बहुत ही उपयोगी है। उदाहरणतः एक अभियन्ता पहिया के घुमाव के विषय में कह सकता है कि यह 900 परिक्रमा प्रति मिनट है। हम कोण के मापने की दो अन्य इकाईयों के विषय में बतायेगें जिनका सामान्यतः प्रयोग किया जाता है, ये डिग्रीमाप तथा रेडियन माप हैं।

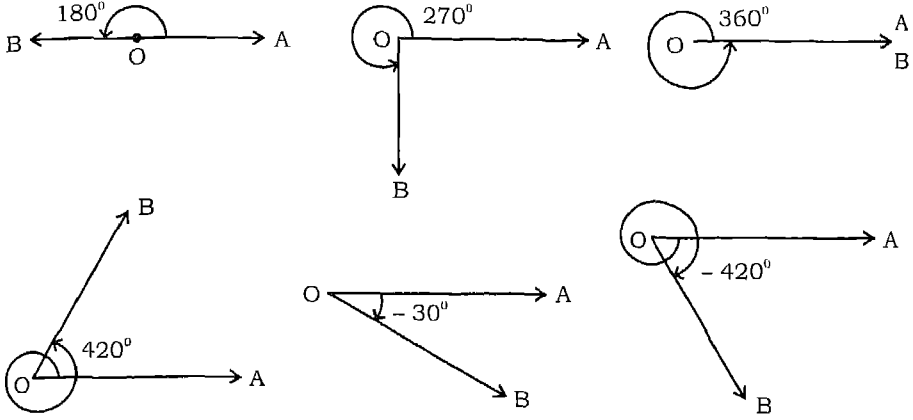
9.2.1 डिग्रीमाप

यदि प्रारम्भिक भुजा से अन्तिम भुजा का घुमाव एक पूर्ण परिक्रमण का $\left(\frac{1}{360}\right)$ भाग हो तो इस कोण का माप $1°$ होता है। एक डिग्री को मिनट में तथा एक मिनट को सेकंड में विभाजित किया जाता है। एक डिग्री का साठवाँ भाग एक मिनट कहलाता है और इसे $1'$ से लिखते हैं तथा एक मिनट का साठवाँ भाग एक सेकण्ड कहलाता है और इसे $1''$ से लिखते हैं। अर्थात्

$$1° = 60'$$

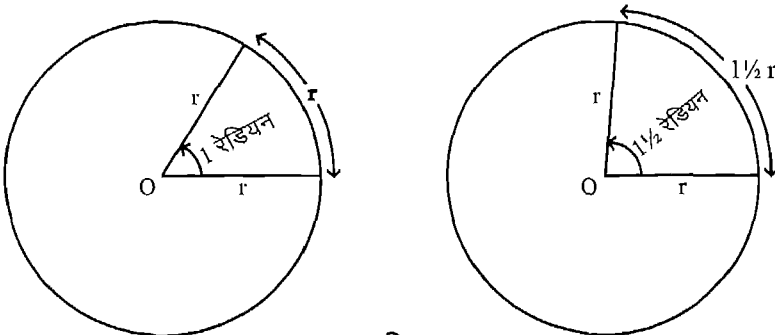
$$1' = 60''.$$

कुछ कोण जिनका माप $180°, 270°, 360°, 420°, -30°, -420°$ हैं उन्हें आकृति 9.3 में

दर्शाया गया है :

आकृति 9.3

9.2.2 रेडियन माप

कोण को मापने के लिये एक दूसरी इकाई भी है जिसे रेडियन माप कहते हैं, जिसका उच्चगणित में विशिष्ट महत्व है। इस प्रणाली में माप की इकाई रेडियन है। एक कोण जिसका शीर्ष, वृत्त के केन्द्र पर है तथा जो वृत्त पर उसकी त्रिज्या के बराबर चाप काटता है, उसका माप एक रेडियन है। आकृति 9.4 में दो कोण दिखाये गये हैं जो क्रमशः 1 रेडियन तथा $1\frac{1}{2}$ रेडियन माप के हैं।

हम जानते हैं कि त्रिज्या r के वृत्त की परिधि (s), $2\pi r$ होती है। अतः प्रारम्भिक भुजा का एक पूर्ण परिक्रमा केन्द्र पर $\frac{2\pi r}{r}$ अर्थात् 2π का कोण अन्तरित करती हैं।

आकृति 9.4

यह सर्वविदित है कि वृत्त के समान चाप केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करते हैं। चूँकि r लम्बाई का चाप केन्द्र पर एक रेडियन का कोण अन्तरित करता है, इसलिए l लम्बाई का एक चाप केन्द्र पर $\frac{l}{r}$ रेडियन का कोण अन्तरित करेगा। अतः यदि एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या r है, चाप की लम्बाई l तथा केन्द्र पर अन्तरित कोण θ रेडियन है, तो हम पाते हैं कि

$$\theta = \frac{l}{r}$$

9.2.3 डिग्री तथा रेडियन के मध्य सम्बन्ध

चूँकि वृत्त केन्द्र पर एक कोण बनाता है जिसकी माप 2π इकाई रेडियन में तथा 360 इकाई डिग्री में होती है, इसलिए

$$2\pi \text{ रेडियन} = 360^\circ,$$

या $$\pi \text{ रेडियन} = 180^\circ$$

उपर्युक्त सम्बन्ध हमें रेडियन को डिग्री तथा डिग्री को रेडियन में बदलने का सूत्र देते हैं। अतः π का निकटतम मान $\frac{22}{7}$ का उपयोग करके हम पाते हैं कि

$$1 \text{ रेडियन} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 16' \text{ निकटतम}$$

पुनः $$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ रेडियन} = 0.01746 \text{ रेडियन निकटतम}$$

कुछ सामान्य (परिचित) कोणों के डिग्री माप तथा रेडियन माप के सम्बन्ध निम्न सारणी में दिये गए हैं :

डिग्री	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
रेडियन	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

सांकेतिक प्रचलन

चूँकि कोणों की माप या तो डिग्री में या रेडियन में होती है, अतः प्रचलित परिपाटी के अनुसार जब हम कोण θ° लिखते हैं, हम समझते हैं कि कोण का माप θ डिग्री है, तथा जब हम कोण β लिखते हैं, तो इसका अर्थ है कि कोण का मापन β रेडियन है।

ध्यान दीजिये जब हम कोण को रेडियन माप में व्यक्त करते हैं तो प्रायः रेडियन लिखना छोड़ देते हैं। अर्थात $\pi = 180^\circ$ तथा $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ लिखा जाता है। इसे हम इस विचार को ध्यान

में रखकर लिखते हैं कि ऐसे संबधों के वायें पक्ष में कोण की माप इकाई रेडियन है। अतः हम यह कह सकते हैं कि

$$\text{रेडियन माप} = \frac{\pi}{180} \times \text{डिग्री माप}$$

$$\text{डिग्री माप} = \frac{180}{\pi} \times \text{रेडियन माप}$$

उदाहरण 1 उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिये जिसमें 45° का केन्द्रीय कोण परिधि पर 187 सेमी लम्बाई का चाप काटता है। (संकेत $\frac{22}{7} = \pi$).

हल यहाँ $l = 187$ सेमी तथा $\theta = \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$.

अतः $r = \frac{l}{\theta}$, के अनुसार हम पाते हैं

$$r = 187 \times \frac{4}{\pi} \text{ सेमी}$$

$$= 238 \text{ सेमी}$$

उदाहरण 2 एक 10 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के उस चाप की लम्बाई बताइये जो केन्द्र पर 45° का कोण बनाता है।

हल हम जानते हैं कि $45° = \frac{\pi}{180} \times 45$ रेडियन $= \frac{\pi}{4}$ रेडियन

अतः $l = r\,\theta = 10 \times \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$ सेमी

उदाहरण 3 एक घड़ी में मिनट की सुई 1.5 सेमी लम्बी है। इसकी नोक 50 मिनट में कितनी दूर जा सकती है? (संकेत $\pi = 3.14$)

हल चूँकि 60 मिनट में घड़ी की मिनट वाली सुई एक परिक्रमण पूरा करती है, अतः 50 मिनट में मिनट की सुई एक परिक्रमण का $\frac{5}{6}$ भाग पूरा करती है या $\frac{5\pi}{3}$ रेडियन। इसलिये तय की गई वांछित दूरी

$$l = r\,\theta$$

$$= 1.5 \times \frac{5\pi}{3} \text{ सेमी} = \frac{5\pi}{2} \text{ सेमी}$$

$$= 5 \times \frac{3.14}{2} \text{ सेमी} = 7.85 \text{ सेमी}$$

उदाहरण 4 यदि दो वृत्तों के चापों की लम्बाई समान हो और वे अपने केन्द्र पर क्रमशः 75° तथा 120° का कोण बनाते हों, तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात बताइये।

हल माना वृत्तों की त्रिज्यायें क्रमशः r_1 तथा r_2 हों तो

$$\theta_1 = 75° = \frac{\pi}{180} \times 75 = \frac{5\pi}{12} \text{ रेडियन}$$

तथा $$\theta_2 = 120° = \frac{\pi}{180} \times 120 = \frac{2\pi}{3} \text{ रेडियन}$$

माना कि चाप की लम्बाई l है, तो $l = r_1\theta_1 = r_2\theta_2$, जिससे

$$\frac{5\pi}{12} \times r_1 = \frac{2\pi}{3} \times r_2 \text{ अर्थात, } \frac{r_1}{r_2} = \frac{8}{5}.$$

इसलिये $r_1 : r_2 = 8 : 5.$

प्रश्नावली 9.1

1. दिये गये निम्नलिखित डिग्री माप के संगत रेडियन माप ज्ञात कीजिये।
(i) 15° (ii) − 37°30′ (iii) 240° (iv) 530°.

2. दिये गये निम्नलिखित रेडियन माप के संगत डिग्री माप ज्ञात कीजिये।
(i) $\frac{3}{4}$ (ii) − 4 (iii) $\frac{5\pi}{3}$ (iv) $\frac{7\pi}{6}$.

3. एक पहिया एक मिनट में 360 परिक्रमण करता है तो एक सेकण्ड में कितने रेडियन माप का कोण बनाएगा?

4. एक 22 सेमी चाप की लम्बाई वाला वृत्त जिसका व्यास 200 सेमी है, वृत्त के केन्द्र पर कितने डिग्री माप का कोण बनाता है? ($\pi = \frac{22}{7}$)

5. एक वृत्त, जिसका व्यास 40 सेमी उसकी एक जीवा 20 सेमी लम्बाई की है तो इसके संगत छोटे वाले चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

6. यदि दो वृत्तों के समान लम्बाई वाले चाप अपने केन्द्रों पर क्रमशः 60° तथा 75° के कोण बनाते हों तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

7. 75 सेमी लम्बाई वाले एक दोलायमान दोलक का, एक सिरे से दूसरे सिरे तक दोलन करने से जो कोण बनता है, उसका रेडियन में माप ज्ञात कीजिए, जब कि उसके नोक द्वारा बनाये गये चाप की लम्बाई निम्न हैं :

(i) 10 सेमी (ii) 15 सेमी (iii) 21 सेमी ($\pi = \frac{22}{7}$ प्रयुक्त कीजिए)।

9.3 त्रिकोणमितीय फलन या वृत्तीय फलन

पूर्व कक्षाओं में हमने न्यून कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों को समकोण त्रिभुज की भुजाओं के अनुपात के रूप में अध्ययन किया है। यदि ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें कोण CAB, θ डिग्री हैं तो हम परिभाषित करते हैं :

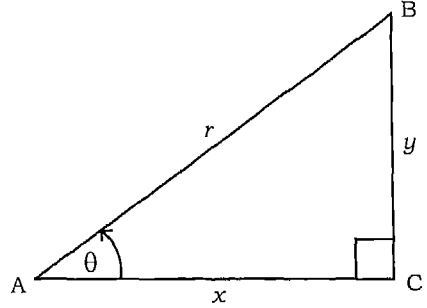
$$\text{sine } \theta = \sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\text{cosine } \theta = \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\text{tangent } \theta = \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\text{cotangent } \theta = \cot\theta = \frac{x}{y}$$

$$\text{secant } \theta = \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\text{cosecant } \theta = \text{cosec } \theta = \frac{r}{y}.$$

आकृति 9.5

अब हम किसी कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात की परिभाषा को त्रिकोणमितीय फलन के रूप में विस्तरित करेगें।

एक इकाई वृत्त (1 इकाई त्रिज्या का वृत्त) लीजिए जिसका केन्द्र निर्देशांक अक्षों का मूल बिन्दु हो।

मान लीजिये कि $P(x, y)$ वृत्त पर कोई बिन्दु है तथा कोण $AOP = \theta$ रेडियन है (आकृति 9.6), तो हम परिभाषित करते हैं

$$\cos\theta = x \text{ तथा } \sin\theta = y$$

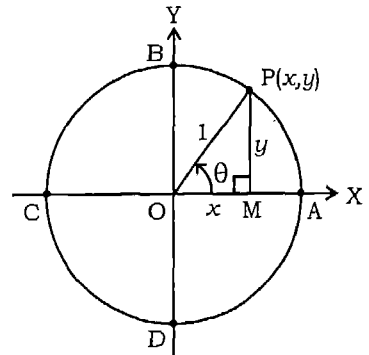
चूँकि Δ OMP समकोण त्रिभुज है, इसलिए

$$OM^2 + MP^2 = OP^2$$

या $\quad x^2 + y^2 = 1$

इस प्रकार वृत्त पर किसी भी बिन्दु $P(x, y)$ के लिये हम पाते हैं, कि

$$x^2 + y^2 = 1$$

या $\quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

आकृति 9.6

वास्तविक संख्या रेखा पर विचार कीजिये जबकि शून्य A पर तथा धनात्मक दिशा x–अक्ष की ओर हो। यदि हम वास्तविक रेखा को इकाई वृत्त के अनुदिश वामावर्त (anticlock wise) दिशा में करें तो केन्द्र पर जो कोण बनेगा वह धनात्मक होगा और यदि हम दक्षिणावर्त (clock wise) दिशा में करें तो इस प्रकार केन्द्र पर जो कोण बनेगा, ऋणात्मक होगा। इकाई वृत्त पर किसी भी बिन्दु का x निर्देशांक $\cos \theta$ तथा y निर्देशांक $\sin \theta$ होगा। चूँकि हम वास्तविक रेखा को इकाई वृत्त के अनुदिश करते हैं, अतः त्रिकोणमितीय फलनों को वृत्तीय फलन भी कहते हैं।

चूँकि एक पूर्ण परिक्रमा द्वारा वृत्त के केन्द्र पर 2π रेडियन का कोण अन्तरित होता है, इसलिए

$$\angle \text{AOB} = \frac{\pi}{2}, \angle \text{AOC} = \pi, \angle \text{AOD} = \frac{3\pi}{2}.$$

बिन्दु A, B, C तथा D के निर्देशांक क्रमशः (1, 0), (0, 1), (–1, 0) तथा (0, –1) हैं। इसलिए

$$\cos 0 = 1 \qquad \sin 0 = 0$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos \pi = -1 \qquad \sin \pi = 0$$

$$\cos\frac{3\pi}{2} = 0 \qquad \sin\frac{3\pi}{2} = -1$$

हम यह भी देखते हैं कि जब θ, 2π के पूर्णांक गुणज में बढ़ता (या घटता) है तो त्रिकोणमितीय फलनों के मानों में कोई परिवर्तन नहीं होता है, इस प्रकार

$$\sin (2\pi + \theta) = \sin \theta$$

$$\cos (2\pi + \theta) = \cos \theta.$$

पुनः $\sin \theta = 0$ है यदि $\theta = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$, अर्थात, $\sin \theta$, शून्य है यदि θ, π का पूर्णांक गुणज है तथा

$$\cos \theta = 0, \text{ है यदि } \theta = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$$

अर्थात $\cos \theta = 0$ जब θ, $\frac{\pi}{2}$ का विषम गुणज हो। इस प्रकार

$\sin \theta = 0$ से प्राप्त होता है कि $\theta = n\pi$, n कोई पूर्णांक है।

$\cos \theta = 0$ से प्राप्त होता है कि $\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, n कोई पूर्णांक है।

अब हम अन्य चार त्रिकोणमितीय फलनों को sine तथा cosine के पदों में परिभाषित करते हैं :

$$\text{cosec } \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \theta \neq n\pi, n \text{ पूर्णांक है}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\ \theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}\ ,\ n \text{ पूर्णांक है}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}\ ,\ n \text{ पूर्णांक है}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},\ \theta \neq n\pi,\ n \text{ पूर्णांक है}$$

हमने निम्नलिखित सर्वसमिकाओं का भी पूर्व कक्षाओं में अध्ययन किया है जो त्रिकोणमितीय अनुपातों के लिये सही थे और अब ये त्रिकोणमितीय फलनों के लिये भी सही हैं। ये हैं :

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$$

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta, \qquad \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta \qquad \cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \text{cosec}\,\theta, \qquad \text{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$$

पूर्व कक्षाओं में हम 30°, 45° तथा 60° के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मानों को ज्ञात कर चुके हैं। त्रिकोणमितीय फलनों का अध्ययन ठीक त्रिकोणमितीय अनुपातों जैसा ही है। हमारे पास निम्नलिखित सारणी है :

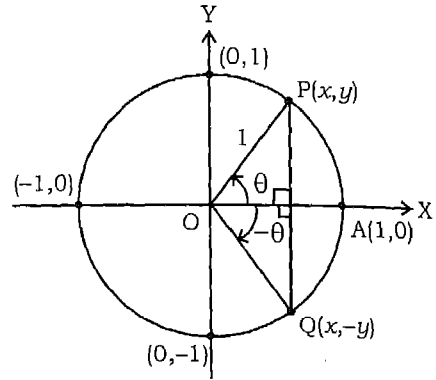
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अपरिभाषित	0	अपरिभाषित	0

9.3.1 ऋणात्मक कोणों के लिये त्रिकोणमितीय फलनों के चिन्ह माना कि इकाई वृत्त पर $P(x, y)$ कोई बिन्दु है, जिसका केन्द्र O पर है, यथा $\angle AOP = \theta$, यदि $\angle AOQ = -\theta$, तो Q के निर्देशांक $(x, -y)$ होगें (आकृति 9.7)। इसलिये

$\cos(-\theta) = x = \cos\theta$

तथा $\sin(-\theta) = -y = -\sin\theta$

आकृति 9.7

चूँकि इकाई वृत्त के प्रत्येक बिन्दु $P(x, y)$ के लिये $-1 \leq x \leq 1$ तथा $-1 \leq y \leq 1$, अतः θ के सभी मानों के लिये $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ तथा $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ पिछली कक्षाओं से हमको ज्ञात है कि प्रथम चतुर्थांश में x और y दोनों धनात्मक हैं, दूसरे चतुर्थांश में x ऋणात्मक तथा y धनात्मक हैं, तीसरे चतुर्थांश में x और y दोनों ऋणात्मक हैं, तथा चौथे चतुर्थांश में x धनात्मक तथा y ऋणात्मक हैं। अतः यदि कोण प्रथम तथा द्वितीय चतुर्थांश में हो तो $\sin\theta$ धनात्मक, तथा यदि तीसरे और चौथे चतुर्थांश में हो तो ऋणात्मक होता है। इसी प्रकार $\cos\theta$ धनात्मक होता है यदि कोण पहले और चौथे चतुर्थांश में हो और ऋणात्मक होता है यदि कोण दूसरे तथा तीसरे चतुर्थांश में हो। इसी प्रकार अन्य त्रिकोणमितीय फलनों का चिन्ह विभिन्न चतुर्थांशों में पता किया जा सकता है। इसके लिए हमारे पास निम्नलिखित सारणी है:

	I	II	III	IV
$\sin\theta$	+	+	–	–
$\cos\theta$	+	–	–	+
$\tan\theta$	+	–	+	–
$\text{cosec}\,\theta$	+	+	–	–
$\sec\theta$	+	–	–	+
$\cot\theta$	+	–	+	–

प्रथम चतुर्थांश में जब कोण θ, 0 से $\frac{\pi}{2}$ की ओर बढ़ता है तो $\sin\theta$ भी 0 से 1 की ओर बढ़ता है दूसरे चतुर्थांश में जब $\theta, \frac{\pi}{2}$ से π की ओर बढ़ता है तो $\sin\theta$, 1 से 0 की ओर घटता है। तीसरे चतुर्थांश में जब कोण π से $\frac{3\pi}{2}$ की ओर बढ़ता है तो $\sin\theta$, 0 से –1 की ओर घटता जाता है। अन्त में जब कोण $\frac{3\pi}{2}$ से 2π की ओर बढ़ता है $\sin\theta$, –1 से 0 की ओर बढ़ता जाता है। इसी

प्रकार हम अन्य त्रिकोणमितीय फलनों के विषय में बिचार कर सकते हैं। वस्तुतः हमारे पास निम्न लिखित सारणी है :

	I चतुर्थांश	II चतुर्थांश	III चतुर्थांश	IV चतुर्थांश
$\sin\theta$	0 से 1 की ओर बढ़ता है	1 से 0 की ओर घटता है	0 से –1 की ओर घटता है	–1 से 0 की ओर बढ़ता है
$\cos\theta$	1 से 0 की ओर घटता है	0 से –1 की ओर घटता है	– 1 से 0 की ओर बढ़ता है	0 से 1 की ओर बढ़ता है
$\tan\theta$	0 से ∞ की ओर बढ़ता है	– ∞ से 0 की ओर बढ़ता है	0 से ∞ की ओर बढ़ता है	– ∞ से 0 की ओर बढ़ता है
$\cot\theta$	∞ से 0 की ओर घटता है	0 से – ∞ की ओर घटता है	∞ से 0 की ओर घटता है	0 से – ∞ की ओर घटता है
$\sec\theta$	1 से ∞ की ओर बढ़ता है	– ∞ से –1 की ओर बढ़ता है	–1 से – ∞ की ओर घटता है	∞ से 1 की ओर घटता है
$\text{cosec}\,\theta$	∞ से 1 की ओर घटता है	1 से ∞ की ओर बढ़ता है	– ∞ से –1 की ओर बढ़ता है	– 1 से – ∞ की ओर घटता है

टिप्पणी : उपर्युक्त सारणी में यह कथन कि अन्तराल $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ में $\tan\theta$ का मान 0 से ∞ (अनन्त) तक बढ़ता है का अर्थ है कि जैसे–जैसे θ का मान $\frac{\pi}{2}$ की ओर अग्रसर होता है वैसे–वैसे $\tan\theta$ का मान बहुत अधिक हो जाता है। इसी प्रकार जब हम यह कहते हैं कि $\text{cosec}\,\theta$ का मान –1 से – ∞ (ऋणात्मक अनन्त) तक चतुर्थ चतुर्थांश में घटता है तो इसका का अर्थ है कि जब $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ अर्थात् $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ है तब $\text{cosec}\,\theta$ बहुत बड़ा ऋणात्मक मान लेता है साधारणतया चिन्ह ∞ और – ∞, फलनों एवम् चरों के विशेष प्रकार के व्यवहार को बताते हैं।

हमने पूर्व कक्षाओं में त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं के विषय में सीखा है। ये हैं

$$\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\,\theta}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta},$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta,$$

$$1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta.$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि छः त्रिकोणमितीय फलनों में यदि मात्र एक ज्ञात हो तो अन्य का संख्यात्मक मान निकाला जा सकता है और उनके चिन्ह भी चतुर्थांश के अनुसार निश्चित किये जा सकते हैं।

उदाहरण 5 यदि $\cot\theta = -\frac{12}{5}$ हो और θ द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है, तो अन्य पाँच त्रिकोणमितीय फलनों को ज्ञात कीजिये।

हल चूँकि $\cot\theta = -\frac{12}{5}$ है, हम पाते हैं कि

$$\tan\theta = -\frac{5}{12}$$

अब $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ या $\sec^2\theta = 1 + \frac{25}{144} = \frac{169}{144}$

अतः $\sec\theta = \pm\frac{13}{12}$

चूँकि θ दूसरे चतुर्थांश में है, sec θ का मान ऋणात्मक होगा। इसीलिये

$$\sec\theta = -\frac{13}{12},$$

इससे यह भी प्राप्त होता है कि

$$\cos\theta = -\frac{12}{13}.$$

पुनः हम पाते हैं

$$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = (-\frac{5}{12})\times(-\frac{12}{13}) = \frac{5}{13}$$

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{13}{5}.$$

9.3.2 त्रिकोणमितीय फलनों का प्रान्त एवं परिसर sine तथा cosine फलन की परिभाषा से हम यह पाते हैं कि वे सभी वास्तविक संख्याओं के लिये परिभाषित हैं। पुनः हम यह भी पाते हैं कि प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिये

$$-1 \le \sin x \le 1 \text{ तथा } -1 \le \cos x \le 1$$

अतः $y = \sin x$ तथा $y = \cos x$ का प्रान्त सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा परिसर अन्तराल $[-1,1]$, अर्थात $-1 \le y \le 1$ है।

चूँकि $\text{cosec}\,x = \frac{1}{\sin x}$, $y = \text{cosec}\,x$ का प्रान्त, समुच्चय $\{x : x \in \mathbf{R}$ तथा $x \ne n\pi, n$ पूर्णांक है$\}$ तथा परिसर $y \ge 1$ या $y \le -1$ है। इसी प्रकार $y = \sec x$ का प्रान्त, समुच्चय $\{x : x \in \mathbf{R}$ और $x \ne (2n+1)\frac{\pi}{2}, n$ पूर्णांक$\}$ तथा परिसर समुच्चय $\{y : y \in \mathbf{R}, y \le -1$ या

$y \geq 1\}$ है। $y = \tan x$ का प्रान्त, समुच्चय $\{x : x \in$ R तथा $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n$ पूर्णांक$\}$ तथा परिसर सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। $y = \cot x$ का प्रान्त, समुच्चय $\{x : x \in$ R तथा $x \neq n\pi, n$ पूर्णांक$\}$ है। तथा परिसर सभी वास्तविक संख्यायें हैं।

9.3.3 आवर्तिक फलन त्रिकोणमितीय फलनों का आवर्तिक होना एक बहुत ही महत्वपूर्ण गुण है। एक फलन f आवर्तिक कहा जाता है, यदि एक वास्तविक संख्या $T > 0$ ऐसी हो कि सभी x के लिए $f(x+T) = f(x)$ है। यदि एक फलन f एक आवर्तिक फलन है तथा T एक ऐसा न्यूनतम शून्येत्तर मान $(T > 0)$ प्राप्त है कि x के सभी मानों के लिए $f(x+T) = f(x)$ हो तो T आवर्तिक फलन का आवर्त काल कहलाता है। हम फलनों के आवर्तिक होने के विषय में निम्नलिखित प्रमेय बिना उपपत्ति के देते हैं :

प्रमेय 1 यदि $f(x)$ एक आवर्तिक फलन है जिसका आर्वत्तन काल T है तो $f(ax+b), a > 0$ एक आवर्तिक फलन है जिसका आर्वत्तन काल $\frac{T}{a}$ है।

हम पहले ही देख चुके हैं कि

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$$

तथा $$\cos(\theta+2\pi) = \cos\theta.$$

इस प्रकार $\sin\theta$ तथा $\cos\theta$ आवर्तिक फलन हैं। यह आसानी से देखा जा सकता है कि $\sin\theta$ और $\cos\theta$ का आवर्त काल 2π है। बाद में हम देखेंगे कि $\tan\theta$ का आवर्त काल π है। यह एक रोचक बात है कि सभी $T > 0$ के लिये एक अचर फलन f आवर्तिक फलन है क्योंकि $f(x+T) = f(x)$। क्योंकि $T > 0$ का कोई न्यूनतम मान नहीं है, जिसके लिये यह सम्बन्ध मान्य है। अतः अचर फलन का कोई आवर्त काल नहीं होता है।

त्रिकोणमितीय फलनों का आवर्तिक गुण, θ के बड़े मानों के लिए ऐसे फलनों का मान निकालने में सहायक होते हैं। उदाहरणतः

$$\sin\frac{31\pi}{3} = \sin\left(10\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-2070°) = \cos(-2070° + 6 \times 360°) \times \cos 90° = 0.$$

$$\tan\left(-\frac{19\pi}{3}\right) = \tan\left(-6\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

प्रश्नावली 9.2

निम्नलिखित प्रश्नों में पाँच अन्य त्रिकोणमितीय फलनों का मान निकालिये :

1. $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, θ तीसरे चतुर्थांश में स्थित है।
2. $\sin\theta = \frac{3}{5}$, θ दूसरे चतुर्थांश में स्थित है।
3. $\tan\theta = \frac{4}{3}$, θ तीसरे चतुर्थांश में स्थित है।
4. $\sec\theta = \frac{13}{5}$, θ चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है।

निम्नलिखित त्रिकोणमितीय फलनों का मान ज्ञात कीजिये :

5. $\sin 765^\circ$.
6. $\operatorname{cosec}(-1410^\circ)$
7. $\tan\frac{13\pi}{3}$
8. $\cot\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$

9.4 योग और अन्तर के त्रिकोणमितीय फलन

इस भाग में हम दो सख्याओं (कोणों) के योग एवं अन्तर के लिए त्रिकोणमितीय फलन निकालेंगे। इस संबध में इन मूल परिणामों को हम त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएं कहेंगे। अनुभाग 9.3.1 में हमने दो मूल परिणामों को सिद्ध किया है, यथा

1. $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, तथा
2. $\cos(-\theta) = \cos\theta$

अब हम कुछ और परिणाम सिद्ध करेंगे :

3. $\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$

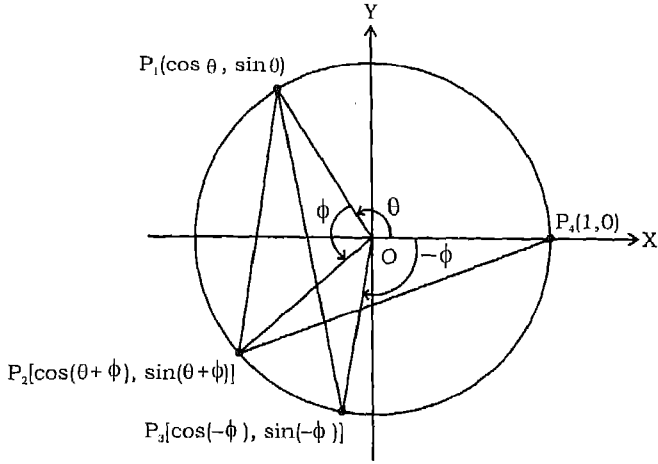
इकाई वृत्त पर विचार कीजिये, जिसका केन्द्र मूल बिन्दु पर हो। आकृति 9.8 को देखिये। माना कि कोण P_4OP_1, θ तथा कोण P_1OP_2, ϕ है तो कोण P_4OP_2, $(\theta + \phi)$ होगा। पुनः माना कोण P_4OP_3, $-\phi$ है। अतः P_1, P_2, P_3, तथा P_4 के निर्देशांक $P_1(\cos\theta, \sin\theta)$, $P_2[\cos(\theta+\phi), \sin(\theta+\phi)]$, $P_3[\cos(-\phi), \sin(-\phi)]$ तथा $P_4(1, 0)$ होगें।

त्रिभुजों P_1OP_3 तथा P_2OP_4 पर विचार कीजिये। वे सर्वांगसम हैं (क्यों?)। इसलिये P_1P_3 और P_2P_4 बराबर हैं।

आकृति 9.8

दूरी सूत्र* का उपयोग करने पर :

$$P_1P_3^2 = [\cos\theta - \cos(-\phi)]^2 + [\sin\theta - \sin(-\phi)]^2$$

$$= (\cos\theta - \cos\phi)^2 + (\sin\theta + \sin\phi)^2$$

[$\cos(-\phi) = \cos\phi$ तथा $\sin(-\phi) = -\sin\phi$ का प्रयोग करने पर]

$$= \cos^2\theta + \cos^2\phi - 2\cos\theta\cos\phi + \sin^2\theta + \sin^2\phi + 2\sin\theta\sin\phi$$

$$= 2-2(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi)$$ (क्यों?)

पुनः $$P_2P_4^2 = [1-\cos(\theta+\phi)]^2 + [0-\sin(\theta+\phi)]^2$$

$$= 1 - 2\cos(\theta+\phi) + \cos^2(\theta+\phi) + \sin^2(\theta+\phi)$$

$$= 2 - 2\cos(\theta+\phi).$$

चूँकि $P_1P_3 = P_2P_4$, हम पाते हैं : $P_1P_3^2 = P_2P_4^2$.

इसलिये $2-2(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) = 2-2\cos(\theta+\phi)$.

अतः $\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$.

4. $\cos(\theta-\phi) = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi$

सर्वसमिका 3 में ϕ के स्थान पर $-\phi$ रखने पर

$$\cos(\theta-\phi) = \cos\theta\cos(-\phi) - \sin\theta\sin(-\phi)$$

या $$\cos(\theta-\phi) = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi.$$

---

* यदि $P:(x_1, y_1)$ तथा $Q:(x_2, y_2)$ हैं, तब $PQ^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$.

5. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

सर्वसमिका (4)में यदि θ के स्थान पर $\frac{\pi}{2}$ तथा φ के स्थान पर x रखें तो हम पाते हैं

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos x+\sin\frac{\pi}{2}\sin x$$

या $$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.$$

6. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

सर्वसमिका 5 का उपयोग करने पर हम पाते हैं :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}=\cos x$$

7. $\sin(\theta+\phi)=\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi$

हम जानते हैं कि

$$\begin{aligned}\sin(\theta+\phi) &= \cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\theta+\phi)\right\}\\ &= \cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\phi\right\}\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\phi+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin\phi\\ &= \sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi\end{aligned}$$

8. $\sin(\theta-\phi)=\sin\theta\cos\phi-\cos\theta\sin\phi$

यदि हम सर्वसमिका 7 में φ के स्थान पर −φ रखें तो हम उपरोक्त परिणाम पाते हैं।

9. θ तथा φ के उपयुक्त मानों को सर्वसमिकाओं 3, 4, 7 तथा 8 में रखने पर हम सरलता से निम्न परिणाम निकाल सकते हैं :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$
$\cos(\pi-x)=-\cos x$	$\sin(\pi-x)=\sin x$
$\cos(\pi+x)=-\cos x$	$\sin(\pi+x)=-\sin x$
$\cos(2\pi-x)=\cos x$	$\sin(2\pi-x)=-\sin x$

इसी प्रकार के संगत परिणाम $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ एवं $\operatorname{cosec} x$ के लिए $\sin x$ तथा $\cos x$ के फलनों के परिणामों से आसानी से निकाले जा सकते हैं।

10. यदि θ और ϕ तथा $(\theta + \phi)$ में से कोई $\frac{\pi}{2}$ का विषम गुणांक नहीं है तो,

$$\tan(\theta + \phi) = \frac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta\tan\phi}$$

चूँकि θ, ϕ तथा $(\theta + \phi)$ में से कोई भी $\frac{\pi}{2}$ का विषम गुणांक नहीं है इसलिए $\cos\theta\cos\phi \neq 0$ तथा $\cos(\theta + \phi) \neq 0$ हैं। अब

$$\tan(\theta + \phi) = \frac{\sin(\theta + \phi)}{\cos(\theta + \phi)}$$

$$= \frac{\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi}{\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi}.$$

अंश और हर को $\cos\theta\cos\phi$ से विभाजित करने पर हम पाते हैं

$$\tan(\theta + \phi) = \frac{\frac{\sin\theta\cos\phi}{\cos\theta\cos\phi} + \frac{\cos\theta\sin\phi}{\cos\theta\cos\phi}}{\frac{\cos\theta\cos\phi}{\cos\theta\cos\phi} - \frac{\sin\theta\sin\phi}{\cos\theta\cos\phi}}$$

$$= \frac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta\tan\phi}.$$

11. $$\tan(\theta - \phi) = \frac{\tan\theta + \tan\phi}{1 + \tan\theta\tan\phi}$$

यदि सर्वसमिका 10 में ϕ के स्थान $-\phi$ रखें तो हम पाते हैं:

$$\tan(\theta - \phi) = \tan[\theta + (-\phi)]$$

$$= \frac{\tan\theta + \tan(-\phi)}{1 - \tan\theta\tan(-\phi)}$$

$$= \frac{\tan\theta - \tan\phi}{1 + \tan\theta\tan\phi}.$$

12. यदि θ, ϕ तथा $(\theta + \phi)$ में से कोई भी कोण π का गुणांक नहीं है, तो

$$\cot(\theta + \phi) = \frac{\cot\theta\cot\phi - 1}{\cot\phi + \cot\theta}$$

चूँकि θ, ϕ तथा $(\theta + \phi)$ कोणों में से कोई भी π का गुणांक नहीं है इसलिए $\sin\theta\sin\phi \neq 0$ तथा $\sin(\theta + \phi) \neq 0$ हैं। अब

$$\cot(\theta+\phi) = \frac{\cos(\theta+\phi)}{\sin(\theta+\phi)}$$

$$= \frac{\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi}{\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi}.$$

अंश और हर को $\sin\theta \sin\phi$ से विभाजित करने पर हम पाते हैं :

$$\cot(\theta+\phi) = \frac{\dfrac{\cos\theta\cos\phi}{\sin\theta\sin\phi} - \dfrac{\sin\theta\sin\phi}{\sin\theta\sin\phi}}{\dfrac{\sin\theta\cos\phi}{\sin\theta\sin\phi} + \dfrac{\cos\theta\sin\phi}{\sin\theta\sin\phi}}$$

$$= \frac{\cot\theta\cot\phi - 1}{\cot\phi + \cot\theta}.$$

13. $\boldsymbol{\cot(\theta-\phi) = \dfrac{\cot\theta\cot\phi + 1}{\cot\phi - \cot\theta}}$

सर्वसमिका 12 में यदि हम ϕ के स्थान $-\phi$ रखें तो, पाते हैं :

$$\cot(\theta-\phi) = \frac{\cot\theta\cot(-\phi) - 1}{\cot(-\phi) + \cot\theta}$$

$$= \frac{-\cot\theta\cot\phi - 1}{-\cot\phi + \cot\theta}$$

$$= \frac{\cot\theta\cot\phi + 1}{\cot\phi - \cot\theta}.$$

उदाहरण 6 सिद्ध कीजिये कि

$$\left(3\cos\frac{\pi}{3}\sec\frac{\pi}{3} - 4\sin\frac{5\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}\right)\cos 2\pi = 1$$

हल हम पाते हैं

$$\text{बायाँ पक्ष} = \left(3\cos\frac{\pi}{3}\sec\frac{\pi}{3} - 4\sin\frac{5\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}\right)\cos 2\pi$$

$$= \left(3\times\frac{1}{2}\times 2 - 4\sin(\pi - \frac{\pi}{6})\times 1\right)1$$

$$= 3 - 4\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= 3 - 4\times\frac{1}{2}$$

$$= 1 = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 7 cos 15° तथा cos 75° का मान ज्ञात कीजिये।

हल हम पाते हैं

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ)$$
$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

पुनः

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$$
$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

उदाहरण 8 $\tan \frac{13\pi}{12}$ का मान ज्ञात कीजिये।

हल हम पाते हैं

$$\tan \frac{13\pi}{12} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right)$$
$$= \tan \frac{\pi}{12}$$
$$= \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}.$$

उदाहरण 9 दिखाइये कि

$$\sin 70^\circ \cos 10^\circ - \cos 70^\circ \sin 10^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

हल सर्वसमिका

$$\sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi = \sin (\theta - \phi)$$

में $\theta = 70^\circ$ तथा $\phi = 10^\circ$ रखने पर हम पाते हैं

$$\sin 70^\circ \cos 10^\circ - \cos 70^\circ \sin 10^\circ = \sin (70^\circ - 10^\circ)$$

$$= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

उदाहरण 10 सिद्ध कीजिये

$$\cos 105^\circ + \cos 15^\circ = \sin 75^\circ - \sin 15^\circ.$$

हल हम पाते हैं

बायाँ पक्ष $= \cos 105^\circ + \cos 15^\circ$

$= \cos (90^\circ + 15^\circ) + \cos (90^\circ - 75^\circ)$

$= -\sin 15^\circ + \sin 75^\circ$

$= \sin 75^\circ - \sin 15^\circ =$ दायाँ पक्ष

उदाहरण 11 सिद्ध कीजिये :

$$\frac{\sin (x+y)}{\sin (x-y)} = \frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y}$$

हल हम पाते हैं

बायाँ पक्ष $= \dfrac{\sin (x+y)}{\sin (x-y)}$

$= \dfrac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\sin x \cos y - \cos x \sin y}$

अंश और हर को $\cos x \cos y$ से विभाजित करने पर, हम पाते हैं:

बायाँ पक्ष $= \dfrac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y} =$ दायाँ पक्ष

उदाहरण 12 यदि $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\phi = -\frac{12}{13}$ हैं, जहाँ θ तथा φ द्वितीय चतुर्थांश में स्थित हों तो $\sin(\theta+\phi)$ का मान ज्ञात कीजिये।

हल हम जानते हैं कि

$$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi \qquad (1)$$

अब $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

इसलिये $\cos\theta = \pm\frac{4}{5}$.

चूँकि θ द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है अतः cos θ ऋणात्मक है

इसलिए $\cos\theta = -\frac{4}{5}$

अब $\sin^2\phi = 1 - \cos^2\phi = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$.

अर्थात $\sin\phi = \pm\frac{5}{13}$

चूँकि φ द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है, sin φ धनात्मक है, इसलिये $\sin\phi = \frac{5}{13}$ है। sin θ, sin φ, cos θ तथा cos φ का मान (1) में रखने पर हम पाते हैं

$$\sin(\theta+\phi) = \frac{3}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{5}{13}$$

$$= -\frac{36}{65} - \frac{20}{65} = -\frac{56}{65}.$$

उदाहरण 13 दिखाइये

$$\cot x\cot 2x - \cot 2x\cot 3x - \cot 3x\cot x = 1$$

हल हम जानते हैं कि $3x = 2x + x$

इसलिये $\cot 3x = \cot(2x + x)$

या $\cot 3x = \frac{\cot 2x\ \cot x - 1}{\cot x + \cot 2x}$

या $\cot 3x\cot x + \cot 3x\cot 2x = \cot 2x\cot x - 1$

या $\cot x\cot 2x - \cot 2x\cot 3x - \cot 3x\cot x = 1$

प्रश्नावली 9.3

सिद्ध कीजिये :

1. $\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{3}-\tan^2\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}$.

2. $2\sin^2\frac{\pi}{6}+\operatorname{cosec}\frac{7\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3}=0$.

3. $3\cos^2\frac{\pi}{4}+\sec\frac{2\pi}{3}+5\tan^2\frac{\pi}{3}=\frac{29}{2}$.

4. $\cot^2\frac{\pi}{6}+\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{6}+3\tan^2\frac{\pi}{6}=6$.

5. $2\sin^2\frac{3\pi}{4}+2\cos^2\frac{\pi}{4}+2\sec^2\frac{\pi}{3}=10$.

दिखाइये कि :

6. $\cos 70^\circ \cos 10^\circ + \sin 70^\circ \sin 10^\circ = \frac{1}{2}$

7. $\cos 130^\circ \cos 40^\circ + \sin 130^\circ \sin 40^\circ = 0$

8. $\sin(40^\circ+\theta)\cos(10^\circ+\theta)-\cos(40^\circ+\theta)\sin(10^\circ+\theta)=\frac{1}{2}$

9. $\sin 105^\circ + \cos 105^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

10. सिद्ध कीजिये कि

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\phi\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\phi\right)=\sin(\theta+\phi)$$

11. सिद्ध कीजिये :

$$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^2.$$

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिये :

12. $$\frac{\cos(\pi+\theta)\cos(-\theta)}{\sin(\pi-\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=\cot^2\theta$$

13. $\cos\theta+\sin(270^\circ+\theta)-\sin(270^\circ-\theta)+\cos(180^\circ+\theta)=0$

14. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)\cos(2\pi+\theta)\left[\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)+\cot(2\pi+\theta)\right]=1$

15. $\sin(n+1)x\sin(n+2)x+\cos(n+1)x\cos(n+2)x=\cos x$

16. निम्न मान ज्ञात कीजिये :

(i) $\cos 210^\circ$

(ii) $\sin 225^\circ$

(iii) $\tan 330^\circ$

(iv) $\cot(-315^\circ)$.

17. $\tan(\alpha+\beta)$ का मान ज्ञात कीजिये जबकि दिया है

$\cot\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$ तथा $\sec\beta=-\frac{5}{3}$. $\beta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$

5.5 अपवर्त्य (Multiple) एंव उपअपवर्त्य (Submultiple) कोणों के त्रिकोणमितीय फलन

इस अनुभाग में हम अपवर्त्य तथा उपअपवर्त्य संख्याओं के त्रिकोणमितीय फलनों का अध्ययन करेंगे। संख्याओं के योग के सूत्र का उपयोग करते हुए हम अपवर्त्य तथा उपअपवर्त्य संख्याओं की सर्वसमिकाओं को ज्ञात करेंगे।

14. $\mathbf{\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x}$

$\mathbf{\cos 2x=1-2\sin^2 x}$ **या** $\mathbf{2\sin^2 x=1-\cos 2x}$

$\mathbf{\cos 2x=2\cos^2 x-1}$ **या** $\mathbf{2\cos^2 x=1+\cos 2x}$

हम जानते हैं कि

$$\cos(\theta+\phi)=\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi.$$

θ तथा ϕ के स्थान पर x रखने पर, हम पाते हैं :

$$\cos(x+x)=\cos x\cos x-\sin x\sin x$$

या
$$\cos 2x = \cos^2 x-\sin^2 x$$
$$= 1-\sin^2 x-\sin^2 x$$
$$= 1-2\sin^2 x$$

पुनः
$$\cos 2x = \cos^2 x-\sin^2 x$$
$$= \cos^2 x-(1-\cos^2 x)$$
$$= 2\cos^2 x-1$$

15. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

हम देखते हैं $\sin(\theta + \phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$

θ तथा ϕ के स्थान पर x रखने पर, हम पाते हैं

$$\sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x$$

या $$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

16. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

हम जानते हैं कि

$$\tan(\theta + \phi) = \frac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta\tan\phi}$$

θ तथा ϕ के स्थान पर x रखने पर हम पाते हैं :

$$\tan(x + x) = \frac{\tan x + \tan x}{1 - \tan x \tan x}$$

या $$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

17. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

हम पाते हैं :

$$\begin{aligned}
\sin 3x &= \sin(2x + x) \\
&= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \\
&= 2\sin x \cos x \cos x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x \\
&= 2\sin x(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x \\
&= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x \\
&= 3\sin x - 4\sin^3 x.
\end{aligned}$$

18. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

हम पाते हैं :

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos(2x + x) \\
&= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\
&= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin x \cos x \sin x \\
&= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x.
\end{aligned}$$

19. $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$

हम पाते हैं :

$$\tan 3x = \tan(2x + x)$$

$$= \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x}$$

$$= \frac{\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + \tan x}{1 - \dfrac{2\tan x . \tan x}{1-\tan^2 x}}$$

$$= \frac{2\tan x + \tan x - \tan^3 x}{1 - \tan^2 x - 2\tan^2 x}$$

$$= \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}.$$

20. (i) $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

(ii) $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

हम जानते हैं कि

$$\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi \quad (1)$$

तथा $$\cos(\theta - \phi) = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi \quad (2)$$

(1) तथा (2) को जोड़ने तथा (1) में से (2) को घटाने पर

$$\cos(\theta + \phi) + \cos(\theta - \phi) = 2\cos\theta\cos\phi \quad (3)$$

तथा $$\cos(\theta + \phi) - \cos(\theta - \phi) = -2\sin\theta\sin\phi \quad (4)$$

माना कि $x = \theta + \phi$ तथा $y = \theta - \phi$ हैं। इसलिये

$$\theta = \frac{x+y}{2} \quad \text{और} \quad \phi = \frac{x-y}{2}$$

(3) तथा (4) में θ तथा ϕ का मान रखने पर हम पाते हैं

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

तथा $$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

21. (i) $\mathbf{\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}$

(ii) $\mathbf{\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}}$

हम जानते हैं कि

$$\sin(\theta + \phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi \qquad (5)$$

तथा $$\sin(\theta - \phi) = \sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi. \qquad (6)$$

(5) तथा (6) को जोड़ने तथा (5) में से (6) को घटाने पर हम पाते हैं:

$$\sin(\theta + \phi) + \sin(\theta - \phi) = 2\sin\theta\cos\phi \qquad (7)$$

तथा $$\sin(\theta + \phi) - \sin(\theta - \phi) = 2\cos\theta\sin\phi. \qquad (8)$$

माना कि $x = \theta + \phi$ तथा $y = \theta - \phi$ हैं। इसलिये

$$\theta = \frac{x+y}{2} \quad \text{और} \quad \phi = \frac{x-y}{2}$$

(7) तथा (8) में θ तथा ϕ का मान रखने पर हम पाते हैं

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

तथा $$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

टिप्पणी : सर्वसमिकाओं (20) तथा (21) से हम निम्न परिणाम पाते हैं :

(i) $\mathbf{2\cos\theta\cos\phi = \cos(\theta+\phi) + \cos(\theta-\phi)}$

(ii) $\mathbf{-2\sin\theta\sin\phi = \cos(\theta+\phi) - \cos(\theta-\phi)}$

(iii) $\mathbf{2\sin\theta\cos\phi = \sin(\theta+\phi) + \sin(\theta-\phi)}$

(iv) $\mathbf{2\cos\theta\sin\phi = \sin(\theta+\phi) - \sin(\theta-\phi)}$.

उदाहरण 14 सिद्ध कीजिये

$$\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}.$$

हल हम पाते हैं :

$$\text{दायाँ पक्ष} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x = \text{बायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 15 सिद्ध कीजिये कि

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

हल हम पाते हैं :

$$\text{दायाँ पक्ष} = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{2\tan x}{\sec^2 x}$$

$$= \frac{2\sin x\cos^2 x}{\cos x}$$

$$= 2\sin x\cos x = \sin 2x = \text{बायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 16 सिद्ध कीजिये : $\frac{\sin x}{1+\cos x} = \tan\frac{x}{2}$

हल हम पाते हैं :

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2} = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 17 सिद्ध कीजिये : $\frac{\cos 5x+\cos 3x}{\sin 5x-\sin 3x} = \cot x$

हल 20 (i) तथा 21(ii) सर्वसमिकाओं का उपयोग करने पर, हम पाते हैं

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{\cos 5x+\cos 3x}{\sin 5x-\sin 3x}$$

$$= \frac{2\cos\frac{5x+3x}{2}\cos\frac{5x-3x}{2}}{2\cos\frac{5x+3x}{2}\sin\frac{5x-3x}{2}}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 18 सिद्ध कीजिये :

$$\cos 2\theta \cos\frac{\theta}{2} - \cos 3\theta \cos\frac{9\theta}{2} = \sin 5\theta \sin\frac{5\theta}{2}.$$

हल हम पाते हैं :

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{1}{2}\left[2\cos 2\theta \cos\frac{\theta}{2} - 2\cos\frac{9\theta}{2}\cos 3\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(2\theta+\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(2\theta-\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{9\theta}{2}+3\theta\right) - \cos\left(\frac{9\theta}{2}-3\theta\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2} - \cos\frac{15\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5\theta}{2} - \cos\frac{15\theta}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2\sin\left\{\frac{\frac{5\theta}{2}+\frac{15\theta}{2}}{2}\right\}\sin\left\{\frac{\frac{5\theta}{2}-\frac{15\theta}{2}}{2}\right\}\right]$$

$$= -\sin 5\theta \sin\left(-\frac{5\theta}{2}\right) = \sin 5\theta \sin\frac{5\theta}{2} = \text{दायाँ पक्ष}.$$

उदाहरण 19 $\tan 22° 30'$ का मान ज्ञात कीजिये।

हल मान लीजिए $\theta = 22° 30'$

तो $\quad 2\theta = 45°$.

अब $\quad \tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

या $\quad \tan 45° = \dfrac{2\tan 22° 30'}{1-\tan^2 22° 30'}$.

मान लीजिए $x = \tan 22° 30'$, तब $1 = \dfrac{2x}{1-x^2}$ या $x^2 + 2x - 1 = 0$.

इसलिये $\quad x = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$.

चूँकि $22° 30'$ एक न्यून कोण है, $x = \tan 22° 30'$ धनात्मक है। अत:

$$\tan 22° 30' = \sqrt{2} - 1$$

उदाहरण 20 यदि $\tan x = \frac{3}{4}, \pi < x < \frac{3\pi}{2}$, तो $\sin\frac{x}{2}$ तथा $\cos\frac{x}{2}$ का मान ज्ञात कीजिये।

हल चूँकि, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, इसलिए $\cos x$ ऋणात्मक है।

पुनः $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$

इसलिये $\sin\frac{x}{2}$ धनात्मक होगा तथा $\cos\frac{x}{2}$ ऋणात्मक होगा।

अब $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$$= 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

इसलिये $\cos^2 x = \frac{16}{25}$ या, $\cos x = -\frac{4}{5}$ (क्यों?)

अब $2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x$

$$= 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$$

इसलिये $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{9}{10}$

या $\sin\frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ (क्यों ?)

पुनः $2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

इसलिये $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{10}$

या $\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ (क्यों ?)

प्रश्नावली 9.4

निम्न सर्वसमिकाओं को सिद्ध कीजिये :

1. $\sin(150° + x) + \sin(150° - x) = \cos x$.

2. $\cos(\frac{3\pi}{4} + x) - \cos(\frac{3\pi}{4} - x) = -\sqrt{2}\sin x$.

3. $\cos(\frac{\pi}{4} + x) + \cos(\frac{\pi}{4} - x) = \sqrt{2}\cos x$.

4. $\sin 2x + 2\sin 4x + \sin 6x = 4\cos^2 x \sin 4x$.

5. $\sin^2 6x - \sin^2 4x = \sin 2x \sin 10x$.

6. $\cos^2 2x - \cos^2 6x = \sin 4x \sin 8x$.

7. $\cos 7x + \cos 5x + \cos 3x + \cos x = 4 \cos x \cos 2x \cos 4x$.

8. $\cot 4x (\sin 5x + \sin 3x) = \cot x (\sin 5x - \sin 3x)$.

9. $\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$.

10. $\dfrac{\cos 9x - \cos 5x}{\sin 17x - \sin 3x} = -\dfrac{\sin 2x}{\cos 10x}$.

11. $\dfrac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \tan 4x$.

12. $\dfrac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan \dfrac{x-y}{2}$.

13. $\dfrac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \tan 2x$.

14. $\dfrac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan \dfrac{x+y}{2}$.

15. $\dfrac{\tan 5\theta + \tan 3\theta}{\tan 5\theta - \tan 3\theta} = 4 \cos 2\theta \cos 4\theta$.

16. $\dfrac{\sin x - \sin 3x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = 2 \sin x$.

17. $\dfrac{\sin 5x - 2 \sin 3x + \sin x}{\cos 5x - \cos x} = \tan x$.

18. $\dfrac{(\sin 7x + \sin 5x) + (\sin 9x + \sin 3x)}{(\cos 7x + \cos 5x) + (\cos 9x + \cos 3x)} = \tan 6x$.

19. $\cos 4x = 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x$.

20. $\tan 4\theta = \dfrac{4 \tan\theta (1 - \tan^2\theta)}{1 - 6\tan^2\theta + \tan^4\theta}$.

21. $(\sin 3x + \sin x) \sin x + (\cos 3x - \cos x) \cos x = 0$.

22. $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 4\cos^2 \dfrac{\alpha - \beta}{2}$.

23. $\dfrac{\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x}{\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x} = \cot 3x$.

24. $\sin 3x + \sin 2x - \sin x = 4 \sin x \cos \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{3x}{2}$.

25. $\cos 6x = 32 \cos^6 x - 48 \cos^4 x + 18 \cos^2 x - 1$.

निम्न प्रश्नों में $\sin\frac{x}{2}, \cos\frac{x}{2}$ और $\tan\frac{x}{2}$ ज्ञात कीजिये।

26. $\tan x = -\frac{4}{3}$, x द्वितीय चतुर्थांश में हो।

27. $\cos x = -\frac{1}{3}$, x तृतीय चतुर्थांश में हो।

28. $\sin x = \frac{1}{4}$, x द्वितीय चतुर्थांश में हो।

9.6 त्रिभुज के कोणों से सम्बन्धित, सप्रतिबन्ध सर्वसमिकायें

जब A, B, C त्रिभुज के कोण हों, तो बहुत सी सर्वसमिकायें, उनके त्रिकोणमितीय फलनों से संबधित होती हैं। हम कुछ उदाहरणों द्वारा उपपत्ति–विधि को समझने का प्रयास करेंगे।

उदाहरण 21 यदि $A + B + C = \pi$ हो, तो सिद्ध कीजिये।

$$\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

हल हम जानते हैं

$$\text{बायाँ पक्ष} = \sin A + \sin B - \sin C$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - \sin C$$

$$= 2\sin\frac{\pi - C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - \sin C$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right]$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2}\right)\right]$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[-2\sin\frac{A}{2}\sin\left(-\frac{B}{2}\right)\right]$$

$$= 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 22 यदि $A + B + C = \pi$, तो सिद्ध कीजिये :

$$\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = 1 - 4 \sin A \sin B \cos C.$$

हल हम पाते हैं :

$$\begin{aligned}
\text{बायाँ पक्ष} &= 2\cos(A+B)\cos(A-B) - \cos 2C \\
&= 2\cos(\pi - C)\cos(A-B) - \cos 2C \\
&= -2\cos C\cos(A-B) - 2\cos^2 C + 1 \\
&= 1 - 2\cos C[\cos(A-B) + \cos C] \\
&= 1 - 2\cos C[\cos(A-B) + \cos\{\pi - (A+B)\}] \\
&= 1 - 2\cos C[\cos(A-B) - \cos(A+B)] \\
&= 1 - 2\cos C[-2\sin A\sin(-B)] \\
&= 1 - 2\cos C[2\sin A\sin B] \\
&= 1 - 4\sin A\sin B\cos C = \text{दायाँ पक्ष}
\end{aligned}$$

उदाहरण 23 यदि $A + B + C = \pi$ हो, तो सिद्ध कीजिये :

$$\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = 2 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

हल हम पाते हैं :

$$\begin{aligned}
\text{बायाँ पक्ष} &= \frac{1+\cos A}{2} + \frac{1+\cos B}{2} + \frac{1+\cos C}{2} \\
&= \frac{1}{2}[3 + \cos A + \cos B + \cos C] \\
&= \frac{1}{2}\left[3 + 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos C\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[3 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2} + \cos C\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[3 + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos C\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[3 + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left[4+2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right\}\right]$$

$$= 2+\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)\right]$$

$$= 2+\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$= 2+\sin\frac{C}{2}\left[-2\sin\frac{A}{2}\sin\left(-\frac{B}{2}\right)\right]$$

$$= 2+2\sin\frac{C}{2}\left[\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right]$$

$$= 2+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$ = दायाँ पक्ष.

उदाहरण 24 यदि $A + B + C = \pi$, तो सिद्ध कीजिये :

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1.$$

हल हमें ज्ञात है :

$$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$$

इसलिये $\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}.$

अत: $$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

या $$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

या $$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1.$$

प्रश्नावली 9.5

यदि $A + B + C = \pi$, तो निम्न सर्वसमिकाओं को सिद्ध कीजिये :

1. $\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = 4 \cos A \sin B \cos C$.
2. $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C$.
3. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$.
4. $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.
5. $\cos A + \cos B - \cos C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - 1$.
6. $\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} = 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.
7. $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - 2 \sin A \sin B \cos C$.
8. $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.
9. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$.
10. $\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1$.
11. $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$.
12. $\tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A \tan 2B \tan 2C$.

9.7 त्रिकोणमितीय फलनों का आलेख (ग्राफ)

इस अनुभाग में हम त्रिकोणमितीय फलनों का आलेख ज्ञात करेंगे। निम्नलिखित में हम विचार कर सकते हैं कि x एक वास्तविक संख्या है या एक कोण की रेडियन में माप है क्योंकि यह सभी आवश्यक रूप से समान हैं।

हम देख चुके हैं कि त्रिकोणमितीय फलन आवर्ती हैं। चूंकि $\sin (2\pi + x) = \sin x$, $\cos (2\pi + x) = \cos x$ तथा $\tan (\pi + x) = \tan x$, जिससे sine तथा cosine का आवर्तकाल 2π है तथा tangent फलन का आवर्तकाल π है। हम यह भी देख चुके हैं कि यदि $f(x)$ का आवर्त काल T है, तो फलन $f(ax + b)$ का आवर्त काल $\frac{T}{a}$ है।

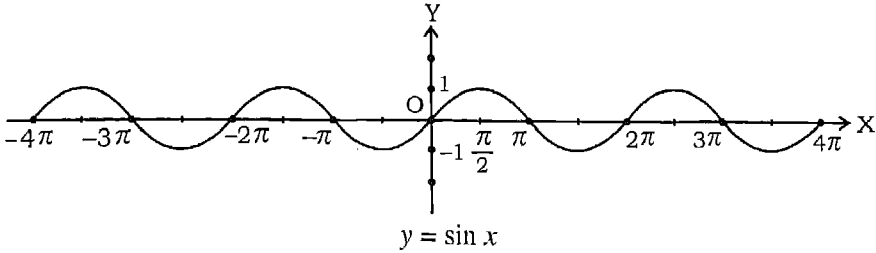
उदाहरण 25 $y = \sin x$ का आलेख खींचिए।

हल चूंकि $\sin x$ एक आवर्ती फलन है, जिसका आवर्तकाल 2π है, अतः इसका आलेख केवल $0 \le x \le 2\pi$ के लिये खींचना प्रर्याप्त होगा। इसका विस्तार सरलता से क्रियाओं को दोहराने से 2π तक किया जा सकता है। हमें ज्ञात है कि $\sin x$ में वृद्धि 0 से 1 तक जब $x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ के अनुसार अग्रसर होता है तथा $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$ के अनुसार 1 से 0 की ओर घटने लगता है। आगे

$\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$ के अनुसार यह 0 से –1 की ओर घटने लगता है, पुनः $\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$ के अनुसार इसमें – 1 से 0 की ओर वृद्धि होने लगती है। इस प्रकार हमें निम्न सारणी मिलती है:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

अब हम इन बिन्दुओं को निर्देशांक तल में अंकित करेंगे तथा उसे सरलता से मिलायेंगे जैसा कि आकृति 9.9 में दर्शाया गया है :

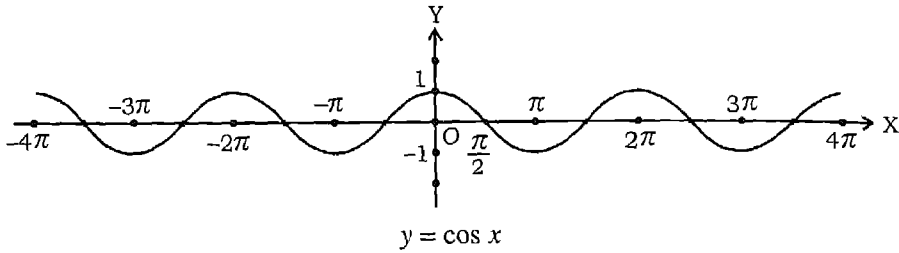
$y = \sin x$

आकृति 9.9

उदाहरण 26 $y = \cos x$ का आलेख खींचिये।

हल चूंकि $\cos x$ एक आवर्ती फलन है जिसका आवर्तकाल 2π है, हम इसका आलेख $0 \le x \le 2\pi$ के लिये खींचेगें तथा इसका विस्तार 2π लम्बाई के अन्तराल पर दोहराते हुए करते हैं। हम जानते हैं कि $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ के लिये $\cos x$, 1 से 0 की ओर घटता है, तथा पुनः यह $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$ के लिये 0 से –1 की ओर घटता है। पुनः $\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$ के लिये यह –1 से 0 की ओर बढ़ता है, तथा पुनः $\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$ के लिये 0 से 1 की ओर बढ़ता है। हमारे पास निम्न सारणी हैं :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	–1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

अब हम इन बिन्दुओं को निर्देशांक तल में अंकित करते हैं तथा सरलता से इन्हें मिलाते हैं जैसा कि आलेख आकृति 9.10 में दर्शाया गया है।

$y = \cos x$

आकृति 9.10

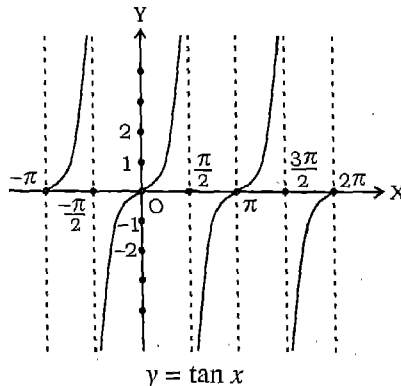
टिप्पणी चूंकि $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, हम $y = \cos x$ का आलेख $\sin x$ के आलेख को $\frac{\pi}{2}$ लम्बाई के बराबर बाईं ओर हटाकर प्राप्त कर सकते हैं।

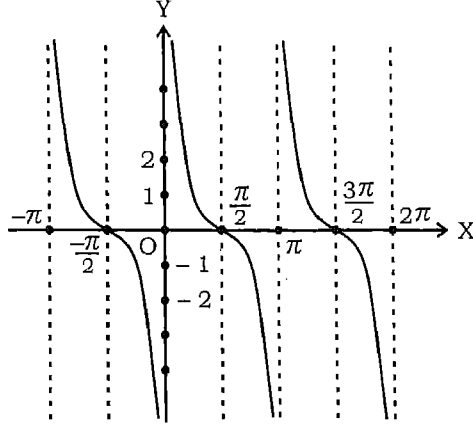
उदाहरण 27 $y = \tan x$ का आलेख खींचिये।

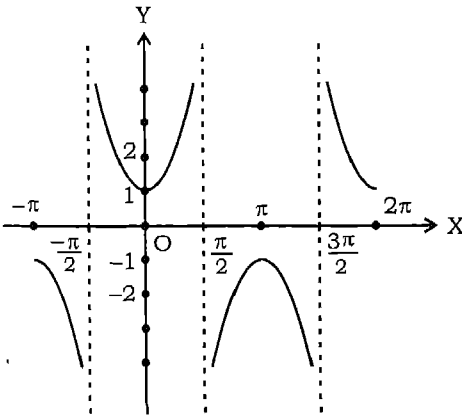
हल हम जानते हैं कि $y = \tan x$ एक आवर्ती फलन है, जिसका आवर्तकाल π है। जैसे–जैसे x, 0 से $\frac{\pi}{2}$ तक बढ़ता है वैसे–वैसे $\tan x$, 0 से ∞ की ओर अग्रसर होता है। जब x का मान $\frac{\pi}{2}$ से बड़ा होता है तो $\tan x$, ऋणात्मक हो जाता है तथा स्वछन्द रूप से बड़ा होता है। जब x, $\frac{\pi}{2}$ से π की ओर बढ़ता है तब यह शून्य की ओर बढता जाता है। हमारे पास निम्नलिखित सारणी है :

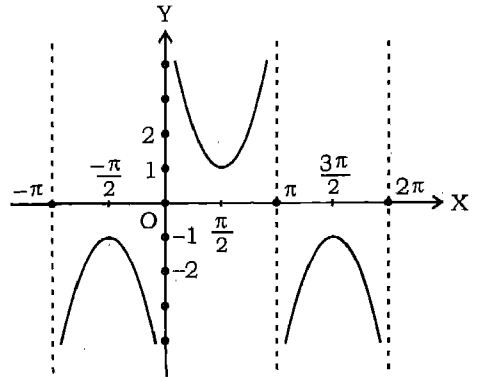
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$\tan x$ का आलेख, आकृति 9.11 में दिया गया है।

$y = \tan x$

आकृति 9.11

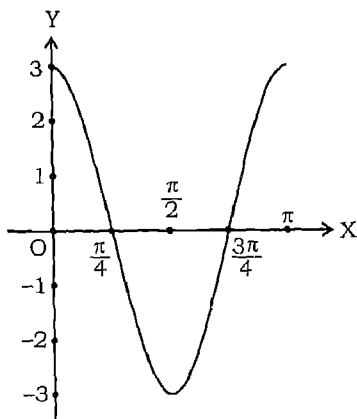
$\cot x$, $\sec x$ तथा $\operatorname{cosec} x$ का आलेख ठीक उसी प्रकार खींचा जा सकता है जिस प्रकार हमने $\sin x$, $\cos x$ तथा $\tan x$ का ग्राफ खींचा है। हम जानते हैं कि $\sec x$ तथा $\operatorname{cosec} x$ आवर्ती फलन हैं तथा इनका आवर्तकाल 2π तथा $\cot x$ भी आवर्ती फलन है तथा इसका आवर्तकाल π है। हम यह भी जानते हैं कि $\sec x \geq 1$ या $\sec x \leq -1$ तथा $\operatorname{cosec} x \geq 1$ या $\operatorname{cosec} x \leq -1$. फलन $\cot x$ सभी धनात्मक एंव ऋणात्मक मान लेता है केवल π के पूर्णांकीय गुणांकों को छोड़कर, जहाँ यह परिभाषित नहीं है। इन फलनों के आलेख नीचे दिये गये हैं।

$y = \cot x$

आकृति 9.12

$y = \sec x$

आकृति 9.13

$y = \operatorname{cosec} x$

आकृति 9.14

उदाहरण 28 $f(x) = 3 \cos 2x$ का आलेख खींचिये।

हल चूंकि cosine फलन का आवर्तकाल 2π है, प्रमेय 9.1 से यह निष्कर्ष निकलता है कि $f(x) = 3 \cos 2x$ का आवर्तकाल $\frac{2\pi}{2}$ अर्थात π है। पुनः ध्यान दीजिये कि f का परिसर $-3 \leq f(x) \leq 3$ है। इसका आलेख आकृति 9.15 में दिया गया है।

$y = 3 \cos 2x$

आकृति 9.15

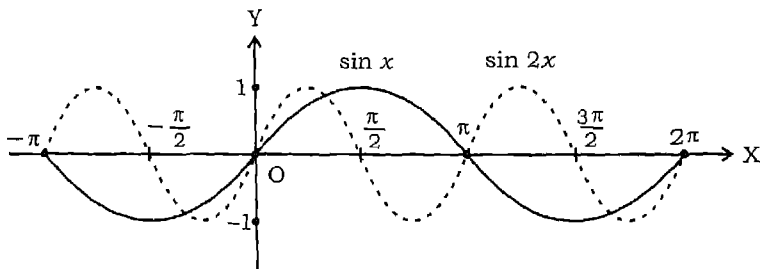
उदाहरण 29 फलन $f(x) = \sin x$ तथा $g(x) = \sin 2x$ का एक ही निर्देशांकों पर आलेख खींचिये।

हल हम जानते हैं कि f का आवर्तकाल 2π

तथा f का परिसर $= -1 \leq f(x) \leq 1$

पुन : g का आवर्तकाल $= \pi$

तथा g का परिसर $= -1 \leq g(x) \leq 1$

दोनों आलेख आकृति 9.16 में में दिये गए हैं।

आकृति 9.16

प्रश्नावली 9.6

निम्नलिखित आलेख खींचिये :—

1. $y = 3 \sin 2x$
2. $y = 2 \tan x$
3. $y = \sin \dfrac{x}{2}$

एक ही निर्देशांक्षों पर समीकरण युगल का आलेख खींचिये :

4. $y = \sin x, y = \cos x, 0 \le x \le 2\pi$
5. $y = \cos x, y = \cos 2x, 0 \le x \le 2\pi$

9.8 त्रिकोणमितीय फलन की सारणी

त्रिकोणमिति में बहुत सारी समस्याओं के हल के लिये त्रिकोणमितीय फलनों के विभिन्न कोणों के लिये फलनों का मान निकालना आवश्यक हो जाता है। किसी भी कोण के त्रिकोणमितीय फलन का मान किसी भी वांछित शुद्धता तक निकाला जा सकता है। छः त्रिकोणमितीय फलनों के $0°$ से $45°$ के निकटतम मानों की सारणियाँ उपलब्ध हैं। $45°$ से $90°$ तक त्रिकोणमितीय फलनों के मान सूत्रों $\sin (90° - \theta) = \cos \theta, \cos (90° - \theta) = \sin \theta$ इत्यादि का उपयोग करके ज्ञात किये जा सकते हैं।

$90°$ से बड़े कोणों के लिये विभिन्न सूत्रों के प्रयोग से उनका मान $0°$ से $90°$ के मध्य लाकर किया जा सकता है। उदाहरणतः $\sin 124° = \sin (90° + 34°) = \cos 34°$। यदि कुछ कोणों के त्रिकोणमितीय फलनों के मान सारणी में नहीं दिये गये हैं तो उन्हें रैखिक अन्तर्वेशन (Interpolation) से ज्ञात किया जा सकता है। हम इन्हें निम्न उदाहरणों द्वारा बता सकते हैं:

उदाहरण 30 $\cot 131°20'$ का मान निकालिये।

हल हम जानते हैं कि $\cot (90° + \theta) = -\tan \theta$.

इस प्रकार $\cot 131°20' = \cot (90° + 41° 20') = -\tan 41° 20'$.

सारणी से हम देखते हैं कि

$$\tan 41°20' = 0.8796.$$

अतः $\cot 131°20' = -0.8796.$

उदाहरण 31 कोण θ ज्ञात कीजिये यदि $\sin \theta = 0.7071,\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ है।

हल sine की सारणी में हम देखते हैं कि

$$\sin 45° = 0.7071.$$

अतः $\theta = 45°.$

उदाहरण 32 $\sin 23°26'$ का मान ज्ञात कीजिये।

हल सारणी से हम देखते हैं कि

$$\sin 23°20' = 0.3961$$

तथा $$\sin 23°30' = 0.3987$$

इसलिये $10'$ के अन्तर से मान में 0.0026 का अन्तर है।

तो $6'$ के अन्तर के लिये मान में अन्तर $\frac{6}{10} \times 0.0026 = 0.00156$

$= 0.0016$ (सन्निकट)

अत : $$\sin 23°26' = 0.3961 + 0.0016$$

$$= 0.3977.$$

प्रश्नावली 9.7

1. निम्नलिखित ज्ञात कीजिये :
   - (i) $\cos 20° 10'$.
   - (ii) $\sin 48°$.
   - (iii) $\tan 54°30'$.
   - (iv) $\cot 33°40'$.
2. कोण θ ज्ञात कीजिये यदि $0° \leq \theta \leq 90°$, तथा
   - (i) $\sin \theta = 0.5373$
   - (ii) $\cos \theta = 0.0087$
   - (iii) $\tan \theta = 34.37$
   - (iv) $\cot \theta = 3.018$
3. निम्नलिखित ज्ञात कीजिये :
   - (i) $\sin 34°22'$.
   - (ii) $\cos 64°34'$.
   - (iii) $\tan 42°6'$.
   - (iv) $\cot 46°26'$.

विविध उदाहरण

उदाहरण 33 सिद्ध कीजिये : $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}=0$.

हल हम पाते हैं

$$\text{बायाँ पक्ष} = \cos\left(\frac{\pi}{13}+\frac{9\pi}{13}\right)+\cos\left(\frac{9\pi}{13}-\frac{\pi}{13}\right)+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}$$

$$= \cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}$$

$$= \cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}+\cos\left(\pi-\frac{10\pi}{13}\right)+\cos\left(\pi-\frac{8\pi}{13}\right)$$

$$= \cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}-\cos\frac{10\pi}{13}-\cos\frac{8\pi}{13}$$

$$= 0 = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 34 सिद्ध कीजिये : $\cos^2 A + \cos^2 (A + \frac{\pi}{3}) + \cos^2 (A - \frac{\pi}{3}) = \frac{3}{2}$

हल हम पाते हैं

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos\left(2A+\frac{2\pi}{3}\right)}{2}+\frac{1+\cos\left(2A-\frac{2\pi}{3}\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+\cos 2A+\cos\left(2A+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(2A-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+\cos 2A+2\cos 2A\cos\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+\cos 2A+2\cos 2A\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+\cos 2A-2\cos 2A\cos\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+\cos 2A-\cos 2A\right] = \frac{3}{2} = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 35 दिखाइये कि $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$

हल हम पाते हैं

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{1}{2\sin 20^\circ}(2\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ)$$

$$= \frac{1}{2\sin 20^\circ}(\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ)$$

$$= \frac{1}{4\sin 20^\circ}(2\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ)$$

$$= \frac{1}{4\sin 20^\circ}(\sin 80^\circ \cos 80^\circ)$$

$$= \frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ} = \frac{\sin (180^\circ - 20^\circ)}{8\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ} = \frac{1}{8} = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 36 $\sin 18^\circ$, $\cos 18^\circ$, $\sin 36^\circ$ तथा $\cos 36^\circ$ के मान ज्ञात कीजिये।

हल माना $\theta = 18^\circ$. अत: $5\theta = 90^\circ$

या $2\theta + 3\theta = 90^\circ$

या $2\theta = 90^\circ - 3\theta$

इसलिए $\sin 2\theta = \sin (90^\circ - 3\theta)$

या $\sin 2\theta = \cos 3\theta$

या $2\sin\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

या $\cos\theta(4\cos^2\theta - 2\sin\theta - 3) = 0.$

चूंकि $\cos\theta = \cos 18^\circ \neq 0$, हम पाते हैं

$4\cos^2\theta - 2\sin\theta - 3 = 0$

या $4(1-\sin^2\theta) - 2\sin\theta - 3 = 0$

या $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0.$

इसलिए $\sin\theta = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

चूंकि $\sin\theta = \sin 18°$ धनात्मक है, तो हम पाते हैं

$$\sin\theta = \sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

अब $\cos^2 18° = 1 - \sin^2 18°$

$$= 1 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}.$$

इसलिये $\cos 18° = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. (क्यों?)

पुनः $\cos 36° = 1 - 2\sin^2 18° = 1 - 2\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$

$$= 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{8} = \frac{2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

पुनः $\sin^2 36° = 1 - \cos^2 36° = 1 - \dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{16}$

$$= \frac{10-2\sqrt{5}}{16}.$$

इसलिये $\sin 36° = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ (क्यों?)

उदाहरण 37 यदि α तथा β दो ऐसी वास्तविक संख्याऐं हैं ताकि $\alpha - \beta \neq 2n\pi$, n पूर्णांक है और जो समीकरण $a\cos\phi + b\sin\phi = c$ को सन्तुष्ट करें, तो सिद्ध कीजिये कि

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

हल चूंकि α, β समीकरण $a\cos\phi + b\sin\phi = c$ को सन्तुष्ट करते हैं, हम पाते हैं

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = c \qquad (1)$$

तथा $a\cos\beta + b\sin\beta = c. \qquad (2)$

(2) को (1) में से घटाने पर, हम पाते हैं

$$a(\cos\alpha - \cos\beta) + b(\sin\alpha - \sin\beta) = 0$$

या $$-2a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + 2b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$$

या $$-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left[a\sin\frac{\alpha+\beta}{2} - b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right] = 0.$$

चूंकि $\alpha - \beta \neq 2n\pi$, इसलिये

$$\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{b}{a} \text{ (क्यों?)}$$

अब दायाँ पक्ष $$= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{1 - \frac{b^2}{a^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

$$= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

$$= \cos(\alpha + \beta) \text{ (क्यों ?)}$$

= बायाँ पक्ष

उदाहरण 38 यदि $\cos(A + B)\sin(C - D) = \cos(A - B)\sin(C + D)$ हो, तो दिखाइये कि

$$\tan A \tan B \tan C + \tan D = 0.$$

हल हम पाते हैं :

$$\cos(A + B)\sin(C - D) = \cos(A - B)\sin(C + D)$$

इसलिये $$\frac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)} = \frac{\sin(C+D)}{\sin(C-D)}$$

योगान्तर अनुपात विधि का प्रयोग करने पर हम पाते हैं

$$\frac{\cos(A+B) + \cos(A-B)}{\cos(A+B) - \cos(A-B)} = \frac{\sin(C+D) + \sin(C-D)}{\sin(C+D) - \sin(C-D)}$$

या $$\frac{2\cos A\cos B}{-2\sin A\sin B}=\frac{2\sin C\ \cos D}{2\cos C\sin D}$$

या $$-\cot A\cot B=\tan C\cot D$$

या $$-\tan D=\tan A\tan B\tan C.$$

अतः $$\tan A\tan B\tan C+\tan D=0.$$

अध्याय 9 पर विविध प्रश्नावली

सिद्ध कीजिये :

1. यदि $A+B+C=\pi$ है, तो सिद्ध कीजिये कि
$\sin(B+C-A)+\sin(C+A-B)-\sin(A+B-C)=4\cos A\cos B\sin C.$

2. $\cos A\cos 2A\cos 4A\cos 8A=\dfrac{\sin 16A}{16\sin A}$

3. $\dfrac{1+\sin 2\theta-\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta+\cos 2\theta}=\tan\theta.$

4. $2\tan 2x=\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}-\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}.$

5. $\sin 10°\sin 30°\sin 50°\sin 70°=\dfrac{1}{16}.$

6. $(\cos x+\cos y)^2+(\sin x-\sin y)^2=4\cos^2\dfrac{x+y}{2}.$

7. $(\cos x-\cos y)^2+(\sin x-\sin y)^2=4\sin^2\dfrac{x-y}{2}.$

8. $\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta+\sin 7\theta=4\cos\theta\cos 2\theta\sin 4\theta.$

9. $\dfrac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}=\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$

10. यदि α तथा β दो विभिन्न वास्तविक संख्यायें हैं जो समीकरण $a\cos x+b\sin x=c$ को सन्तुष्ट करती हों, तो सिद्ध कीजिये कि

(i) $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$

(ii) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$

यदि $A + B + C = \pi$, है तो निम्नलिखित को सिद्ध कीजिये :

11. $\dfrac{\cos A}{\sin B \sin C} + \dfrac{\cos B}{\sin C \sin A} + \dfrac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2$

12. $\cos 4A + \cos 4B + \cos 4C = -1 + 4 \cos 2A \cos 2B \cos 2C$

18° तथा 36° के त्रिकोणमितीय फलनों के मानों का उपयोग कर, निम्न में से प्रत्येक को सिद्ध कीजिये :

13. $\sin^2 72^\circ - \sin^2 60^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{8}$

14. $\sin\dfrac{\pi}{5} \sin\dfrac{2\pi}{5} \sin\dfrac{3\pi}{5} \sin\dfrac{4\pi}{5} = \dfrac{5}{16}$

कार्तीय समकोणिक निर्देशांक निकाय

अध्याय 10

(CARTESIAN SYSTEM OF RECTANGULAR COORDINATES)

10.1 भूमिका

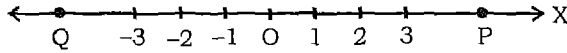
हम ज्यामिति से परिचित हैं जिसमें सामान्यतः आकृतियों और वक्रों के गुणधर्मों का अध्ययन होता है। हाई स्कूल तक अध्ययन की गयी ज्यामिति युक्लीडीयन ज्यामिति कहलाती है क्योंकि यह सुप्रसिद्व यूनानी गणितज्ञ युक्लिड द्वारा लगभग 300 वर्ष ईसा पूर्व लिखी गई ज्यामिति की प्रथम व्यवस्थित पुस्तक में वर्णित अभिगृहीतियों पर आधारित है। इस अवधि से लेकर सत्रहवीं शताब्दी तक ज्यामितीय अध्ययन में केवल ज्यामितीय तर्क का प्रयोग होता था। ज्यामिति के इस अध्ययन को संश्लेषिक–ज्यामिति (Synthetic geometry) कहते हैं। कुछ प्रश्न ऐसे भी थे जिनके हल संश्लेषिक ज्यामिति में उपलब्ध नहीं थे। लगभग सतरहवीं शताब्दी के अन्त तक ज्यामिति को बीजगणित से जोड़ा नहीं गया था ओर इसके पश्चात इसका संश्लेषिक ज्यामिति के प्रश्नों के हल में प्रयोग किया जाने लगा। इसके द्वारा ज्यामिति के अध्ययन में बीजगणितीय विधियों का प्रयोग किया जाना आरम्भ हुआ। इसे वैश्लेषिक ज्यामिति (Analytic geometry) के रूप में जाना जाता है। बीजगणित के प्रयोग पर आधारित ज्यामिति का सुव्यवस्थित अध्ययन सर्वप्रथम सर्वमान्य फ्राँसीसी दार्शनिक और गणितज्ञ रेने देकार्त [Rene' Descartes (1596-1650)] द्वारा उनकी पुस्तक ला--ज्यामित्री (La-geometrie) में किया गया है। पुस्तक ला–ज्यामित्री सन् 1637 में प्रकाशित हुई। यह पुस्तक ला–ज्यामित्री मुख्यतः ज्यामितीय प्रश्नो के बीजगणितीय हल और बीजगणितीय समीकरणों के ज्यामितीय निरूपण से संम्बधित है।

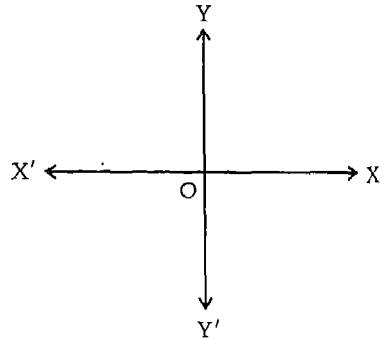
बीजगणित को ज्यामिति से सम्बन्धित करने के लिए देकार्त ने ज्यामिति के आधारभूत संकल्पना में बिन्दु का बीजगणित के आधारभूत इकाई "संख्या" के बीच साहचर्य स्थापित किया। इस संम्बन्ध को निर्देशांक–निकाय (System of coordinates) कहते हैं।

पिछली कक्षाओं में हम एक रेखा के बिन्दुओं को वास्तविक संख्याओं तथा एक तल के बिन्दुओं को वास्तविक संख्याओं के क्रमित–युग्मों से सह सम्बन्धन के विषय में विस्तृत रूप से

अध्ययन कर–चुके हैं। इस सहसम्बन्ध को रेने–देकार्त के नाम से जोड़ते हुये कार्तीय निर्देशांक निकाय (Cartesian coordinate system) कहते हैं। इसका अध्ययन हम इस अध्याय मे करेंगे।

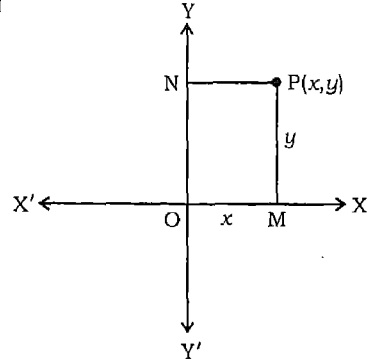
10.2 कार्तीय निर्देशांक निकाय (Cartesian Coordinate System)

हम जानते हैं, कि वैश्लेषिक ज्यामिति की आधारभूत संकल्पना सभी वास्तविक संख्याओं का संख्या रेखा पर बिन्दुओं द्वारा निरूपण है। हम रेखा पर एक बिन्दु जिसे मूल बिन्दु कहते हैं, का चयन करते हैं तथा इसकी संगतता शून्य से स्थापित करते हैं। तब हम इकाई दूरी लेते हैं (आकृति 10.1)। बिन्दु O के दाहिनी ओर एक बिन्दु P के दिए जाने पर हम इसका एक वास्तविक धन संख्या से साहचर्य स्थापित कर सकते हैं। O के बायीं ओर स्थित प्रत्येक बिन्दु Q का साहचर्य एक वास्तविक ऋण संख्या से स्थापित किया जा सकता है। इस प्रकार रेखा के प्रत्येक बिन्दु की संगतता एक वास्तविक संख्या से होती है तथा विलोमतः किसी वास्तविक संख्या की संगतता रेखा के एक निश्चित अद्वितीय बिन्दु से होती है। वास्तविक संख्याओं के समुच्चय तथा रेखा के बिन्दुओं के समुच्चय के बीच इस एकैक–संगतता को एक विमीय निर्देशांक निकाय (One dimensional coordinate system) कहते हैं।

आकृति 10.1

युक्लीडीयन तल के बिन्दुओं को भी संख्याओं द्वारा निर्देशांकित किया जा सकता है। इस उद्देश्य की पूर्ति के लिए हम दो परस्पर लम्ब रेखायें X′ OX और Y′OY खींचते हैं। उपर्युक्त दोनों रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिन्दु O को मूल–बिन्दु कहते हैं (आकृति 10.2)। क्षैतिज रेखा X′ OX को x–अक्ष कहते हैं और इसकी दाहिनी ओर की दिशा धनात्मक दिशा के रूप में समझी जाती है। उर्ध्व रेखा Y′OY को y–अक्ष कहते हैं जिसकी ऊपर की ओर की दिशा धनात्मक ली जाती है। प्रत्येक अक्ष पर इकाई लम्बाई निर्धारित करके O को मूल बिन्दु लेते हुये संख्या पैमाना स्थापित किया जाता है।

आकृति 10.2

मान लीजिए कि तल में एक बिन्दु P अकिंत है। x–अक्ष तथा y–अक्ष पर क्रमशः PM और PN लम्ब खींचिए। x–अक्ष पर बिन्दु M से साहचर्य स्थापित करने वाली संख्या को बिन्दु P का भुज (*abscissa*) या x–निर्देशांक, तथा y–अक्ष पर बिन्दु N से साहचर्य स्थापित करने वाली वास्तविक संख्या को बिन्दु P की कोटि (*ordinate*) या y–निर्देशांक कहते हैं। क्रमित युग्म

(x, y) को बिन्दु P के निर्देशांक कहते हैं। ध्यान दें कि क्रमित युग्म की पहली प्रविष्टि बिन्दु x–निर्देशांक तथा दूसरी y–निर्देशांक को व्यक्त करती हैं।

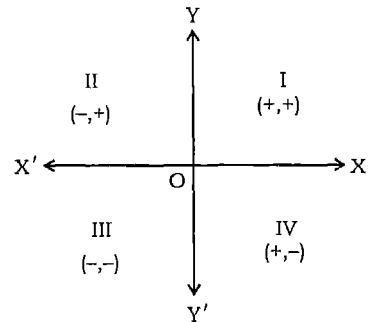
विलोमतः क्रमित युग्म (x, y) के दिए जाने पर हम इस युग्म के संगत बिन्दु को तल में चिन्हित कर सकते हैं। इसके लिए हम x–अक्ष पर वास्तविक संख्या x के संगत बिन्दु M ज्ञात करते हैं। इसके पश्चात वास्तविक संख्या y के संगत y–अक्ष पर बिन्दु N ज्ञात करते हैं। अब हम M तथा N बिन्दुओं से क्रमशः x–अक्ष और y–अक्ष पर लम्बों को खींचते हैं। इन दो लम्बों का प्रतिच्छेदन बिन्दु ही वह बिन्दु है जिसकी संगतता क्रमित युग्म (x, y) से है। इस प्रकार वास्तविक संख्याओं के प्रत्येक क्रमित–युग्म की संगतता तल के एक अद्वितीय बिन्दु से होती है।

आकृति 10.3

फलतः इस प्रकार का निरूपण वास्तविक संख्याओं के क्रमित–युग्मों के समुच्चय और तल के बिन्दुओं के समुच्चय के मध्य एकैक–संगतता (one to one correspondence) स्थापित करता है। सभी क्रमित युग्मों के इस समुच्चय को R^2 द्वारा व्यक्त किया जाता है तथा इन्हे निरूपित करने वाले तल को कार्तीय तल (Cartesian plane) कहते हैं।

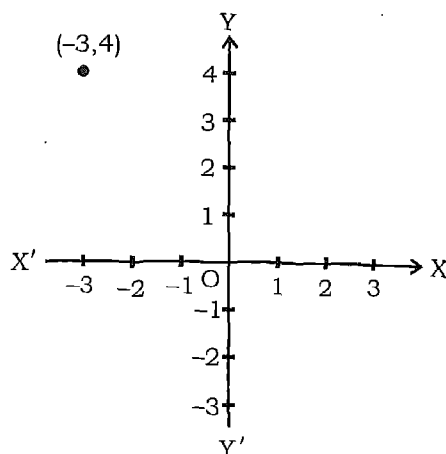
x–अक्ष और y–अक्ष परस्पर लम्ब हैं, यही कारण है, कि निर्देशांकों के इस निकाय को समकोणिक कार्तीय निर्देशांक निकाय भी कहते हैं। तथापि तिर्यक निर्देशांक का परिचय दो परस्पर अलम्ब प्रतिच्छेदित अक्षांशों द्वारा किया जा सकता है।

अब स्मरण कीजिए कि निर्देशांक अक्ष X′OX और Y′OY निर्देशांक तल को चार भागों में विभक्त करती हैं। इन्हें चतुर्थांश कहते हैं। इनको OX से घड़ी की सूई के विपरीत दिशा में I, II, III, और IV द्वारा संख्यांकित करते हैं (आकृति 10.4)। जैसा कि आकृति 10.4 में प्रदर्शित है, प्रथम चतुर्थांश में स्थित बिन्दु के दोनों निर्देशांक धनात्मक होते हैं तथा इसे (+, +) द्वारा दर्शाया गया है।

विभिन्न चर्तुथांशो में बिन्दुओं के निर्देशांको के चिन्ह नीचे दिये गये हैं।

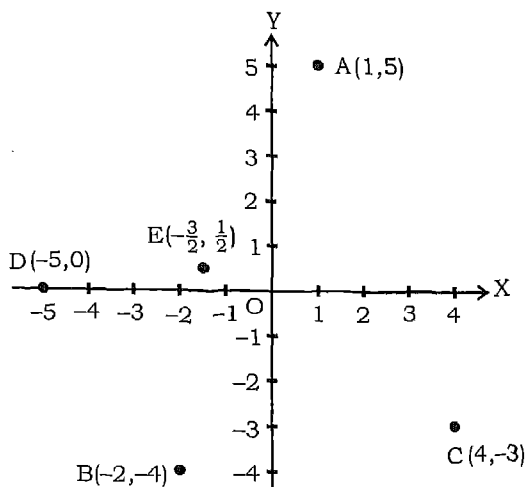
चर्तुथांश		**निर्देशांको के चिन्ह**
	x–निर्देशांक या भुज	y–निर्देशांक या कोटि
I	$x > 0$, धनात्मक	$y > 0$, धनात्मक
II	$x < 0$, ऋणात्मक	$y > 0$, धनात्मक
III	$x < 0$, ऋणात्मक	$y < 0$, ऋणात्मक
IV	$x > 0$, धनात्मक	$y < 0$, ऋणात्मक

आकृति 10.4

इसके अतिरिक्त यदि किसी बिन्दु का भुज शून्य हो तो वह y–अक्ष पर स्थित होता है, और यदि कोटि शून्य हो तो वह बिन्दु x–अक्ष पर स्थित होता है हम यह भी देखते हैं, कि मूल–बिन्दु के निर्देशांक (0, 0) हैं।

कोई बिन्दु जिसके निर्देशांक ज्ञात हों, तो स्थानाँकित करने के लिए मूल बिन्दु से निर्देशांक्षों के अनुदिश समुचित दूरियों को नापकर बिन्दु को चिंहित करना होता है। उदाहरणतः बिन्दु (–3, 4) को स्थानाँकित करने के लिए हम समकोणिक निर्देशांक लेते हैं साथ ही लम्बाई का मात्रक निर्धारित कर लेते हैं (आकृति 10.5)।

आकृति 10.5

यदि भुज –3 है तो इसका अर्थ यह है कि बिन्दु मूल बिन्दु से 3 इकाई x–अक्ष के अनु बांई ओर, और कोटि 4 का अर्थ है, कि बिन्दु y–अक्ष के अनु 4 इकाई मूल बिन्दु से ऊपर की ओर है। इसके फलस्वरूप हम x–अक्ष के अनु 3 इकाई बायीं ओर जाकर पुनः वहां से 4 इकाई y–अक्ष के समान्तर ऊपर जाकर बिन्दु को स्थानाँकित करते हैं (आकृति 10.5)।

उदाहरण 1 समकोणिक निर्देशांक निकाय में बिन्दुओं (1, 5), (–2, –4), (4, –3), (–5, 0) और $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ को आलेखित कीजिए।

हल समुचित पैमाने के साथ समकोणिक निर्देशाक्षों को खींचिए। क्रमित युग्मों (1, 5), (–2, –4), (4, –3), (–5, 0) और $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ के संगत बिन्दु क्रमशः A, B, C, D और E है जैसा कि आकृति 10.6 में दर्शाया गया है।

आकृति 10.6

प्रश्नावली 10.1

1. बिन्दुओं, जिनके निर्देशांक (2, 3), (2, –3), (–2, –3), (–2, 3), (0, 5), (–2, 0) हैं, को आलेखित कीजिए।
2. उस चतुर्भुज को खींचिए जिसके शीर्ष (– 4, 5), (0, 7), (5, – 5) और (– 4, –2) हैं।
3. निम्न बिन्दु कहाँ स्थित होंगे यदि
   (i) उनकी कोटि 2 है।
   (ii) उनका भुज – 3 है।
4. यदि किसी आयत के तीन शीर्ष (0, 0), (2, 0) और (0, 3) हैं, तो चौथे शीर्ष के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
5. 2 a भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज का आधार y–अक्ष के अनु इस प्रकार है, कि मूल बिन्दु आधार का मध्य बिन्दु है। त्रिभुज के शीर्षों को ज्ञात कीजिए।

10.3 दूरी सूत्र (Distance Formula)

बहुत से प्रश्नों में दो बिन्दुओं के बीच की दूरी या दो बिन्दुओं को मिलाने से बने रेखा खण्डों की लम्बाई की आवश्यकता पड़ती है, जिसे बिन्दुओं के निर्देशाकों द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। हम बिन्दुओं P (x_1, y_1) और Q (x_2, y_2) के बीच दूरी के लिए सूत्र ज्ञात करते हैं।

xy–तल में बिन्दुओं P (x_1, y_1) तथा Q (x_2, y_2) को चिन्हित कीजिए (आकृति 10.7) P और Q, बिन्दुओं से y –अक्ष के समान्तर रेखायें खींचिए, जो x–अक्ष को बिन्दुओं A तथा B पर क्रमशः मिलते हैं।

P बिन्दु से x–अक्ष के समान्तर एक रेखा खींचिए जो y–अक्ष से C तथा Q से खींची गयी उर्ध्व रेखा से R पर मिलती हैं। अब

$$OA = P \text{ का भुज } = x_1.$$

इसी प्रकार $OB = x_2$, $OC = y_1$ और $OD = y_2$

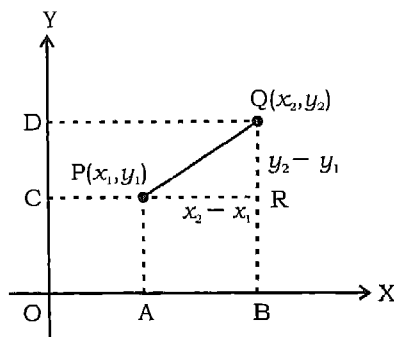
इसलिए आकृति (10.7) में हम पाते हैं, कि

$$PR = AB = OB - OA = x_2 - x_1.$$

इसी प्रकार $RQ = CD = OD - OC = y_2 - y_1$.

अब समकोण त्रिभुज PRQ में, पाइथागोरस प्रमेय द्वारा हम पाते हैं, कि

$$PQ^2 = PR^2 + RQ^2$$

या $$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

आकृति 10.7

चूंकि दूरी या रेखा–खण्ड PQ की लम्बाई सदैव अऋणात्मक (non–negative) होती है, इसलिए धनात्मक वर्ग मूल लेने पर, हम अभीष्ट दूरी को निम्नांकित रूप में पाते हैं,

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

इस परिणाम को दूरी–सूत्र *(distance formula)* कहते हैं।

उपप्रमेय बिन्दु P (x, y) की मूल बिन्दु (0, 0) से दूरी

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

टिप्पणी

1. जब PQ रेखा y–अक्ष के समान्तर होती है, तो बिन्दुओं P तथा Q के भुज समान होते हैं, अर्थात् $x_1 = x_2$. इसलिए $PQ = |y_2 - y_1|$
2. जब रेखा–खण्ड PQ , x–अक्ष के समान्तर है, तो बिन्दुओं P तथा Q की कोटियां समान होती है, अर्थात $y_1 = y_2$ इसलिए $PQ = |x_2 - x_1|$
3. जब P और Q विभिन्न चर्तुथाशों में हो, तब भी उपर्युक्त परिणाम सत्य होतें है

उदाहरण 2 बिन्दुओं (4, 5) और (–3, 2) के बीच दूरी ज्ञात कीजिए।

हल मान लिजिए कि बिन्दु P और Q क्रमशः (4, 5) और (– 3, 2) को निरुपित करते हैं। तब दूरी–सूत्र द्वारा अभीष्ट दूरी

$$PQ = \sqrt{(-3-4)^2 + (2-5)^2}$$

$$= \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{49+9}$$

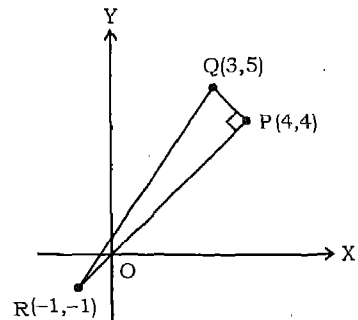
$$= \sqrt{58}\,.$$

उदाहरण 3 सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (4, 4), (3, 5) और (–1, –1) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

हल मान लीजिए कि बिन्दु (4, 4), (3, 5) और (–1, –1) क्रमशः P, Q और R, द्वारा व्यक्त हैं (आकृति 10.8)। अब

$$PQ = \sqrt{(3-4)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{2}$$

$$QR = \sqrt{(-1-3)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{52}$$

और $$PR = \sqrt{(-1-4)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{50}$$

आकृति 10.8

इसलिए $PQ^2 = 2$, $QR^2 = 52$ और $PR^2 = 50$

हम देखते हैं, कि दो भुजाएं

PQ और PR, के वर्गों का योगफल, तीसरी भुजा QR के वर्ग के बराबर है

अर्थात् $QR^2 = PR^2 + PQ^2$

अतः पैथागोरस प्रमेय के विलोम से स्पष्ट है कि त्रिभुज PQR समकोणिक हैं, जिसका कोण P समकोण है।

उदाहरण 4 दूरी सूत्र के प्रयोग द्वारा दर्शाइए कि बिन्दु (–1, 2), (5, 0) और (2, 1) संरेख हैं।

हल मान लीजिए कि बिन्दु (–1, 2), (5, 0) और (2, 1) क्रमशः A, B और C द्वारा व्यक्त होते हैं।

अब
$$AB = \sqrt{(5-(-1))^2+(0-2)^2} = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$$
$$BC = \sqrt{(2-5)^2+(1-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$
$$CA = \sqrt{(-1-2)^2+(2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

स्पष्ट है, कि BC + CA = AB.

इसलिए बिन्दु A, B और C संरेख हैं।

उदाहरण 5 x–अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (7, 6) और (–3, 4) से समदूरस्थ (equidistant) हो।

हल चूँकि अभीष्ट बिन्दु (मान लीजिए P) x–अक्ष पर स्थित है अतः इसकी कोटि शून्य है। मान लीजिए कि उसका भूज x है।

इस प्रकार बिन्दु P का निर्देशांक $(x, 0)$ है।

मान लीजिए कि बिन्दु (7, 6) और (–3, 4) कमशः A तथा B को व्यक्त करते हैं। चूँकि AP = BP

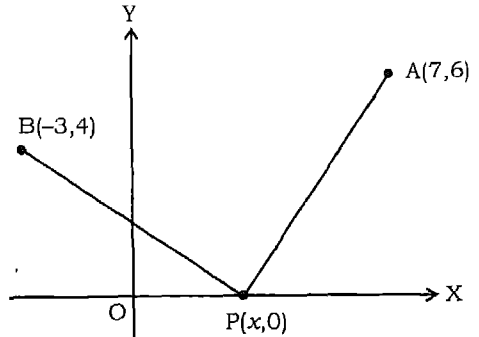
आकृति 10.9

इसलिए $AP^2 = BP^2$

अर्थात् $(x-7)^2 + (0-6)^2 = (x+3)^2 + (0-4)^2$

या $x^2 + 49 - 14x + 36 = x^2 + 6x + 9 + 16$

या $20x = 60$ या $x = 3$.

इस प्रकार अभीष्ट बिन्दु (3, 0) है।

उदाहरण 6 एक त्रिभुज के शीर्ष $(1, 2\sqrt{3})$, (3, 0) और (–1, 0) हैं। क्या त्रिभुज समबाहु, या समद्विबाहु या विषमबाहु है ?

हल मान लिजिए कि बिन्दु $(1, 2\sqrt{3})$, (3, 0) और (–1, 0) क्रमश: A, B और C द्वारा व्यक्त होते हैं।

अब $\quad AB = \sqrt{(3-1)^2+(0-2\sqrt{3})^2} = 4$

$\quad BC = \sqrt{(-1-3)^2+(0-0)^2} = 4$

और $\quad AC = \sqrt{(-1-1)^2+(0-2\sqrt{3})^2} = 4.$

स्पष्टत: AB = BC = AC.

इसलिए त्रिभुज ABC एक समबाहु है।

प्रश्नावली 10.2

1. निम्नांकित प्रश्नों में बिन्दुओं A तथा B के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

2. (i) A (–3, 4), B (3, 0) (ii) A (5, –12), B (9, –9)
(iii) A (6, –4), B (3, 0) (iv) A (0, 0), B (–5, 12)

2. दिखाइए कि बिन्दु A (1, 0), B(5, 3), C(2, 7) और D (–2, 4) एक समचर्तुभुज के शीर्ष हैं।

3. जाँच कीजिए कि क्या बिन्दु (–5, 7), (2, 5) और (1, –1) सभी बिन्दु (–2, 3) से समदूरस्थ (equidistant) हैं।

प्रत्येक निर्देशित बिन्दु युग्मों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

4. $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$, $(a\cos\beta, a\sin\beta)$.

5. $(\cos\theta, \sin\theta)$, $(\sin\theta, \cos\theta)$.

6. $(x-y, y-x)$, $(x+y, x+y)$.

7. बिन्दुओं (3, 2) और (–5, –2) से समदूरस्थ x–अक्ष पर स्थित बिन्दु ज्ञात कीजिए।

दूरी–सूत्र की सहायता से ज्ञात कीजिए कि प्रश्न 8 से 10 तक में दिए गये बिन्दु क्या एक रेखा पर स्थित हैं?

8. (0, 0), (3, 2), (9, 6).

9. (–3, –5), (1, –6), (–7, –4).

10. (3, 5), (1, 1), (–2, –5).

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक प्रश्न 11 और 12 में दिए गए बिन्दु–एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

11. (6, 2), (3, −1), (−2, 4).

12. (−2, 2), (8, −2), (−4, −3).

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक त्रिभुज जिनके शीर्ष प्रश्न 13 और 14 में दिए गए हैं, समद्विबाहु है।

13. (8, 2), (5, −3), (0, 0).

14. (0, 6), (−5, 3), (3, 1).

15. x का ऐसा मान ज्ञात करें कि PQ = QR, जहां बिन्दु P, Q और R क्रमशः (6, 1), (1, 3) और (x, 8), हैं।

16. y–अक्ष पर स्थित कौन सा बिन्दु है जो बिन्दुओं (−5, −2) और (3, 2) से समदूरस्थ है?

17. x और y में सम्बन्ध ज्ञात कीजिए जिससे बिन्दु (x, y), बिन्दुओं (6, −1) और (2, 3) से समान दूरी पर हो।

18. दिखाइए कि चर्तुभुज जिसके शीर्ष (3, 2), (0, 5), (−3, 2) और (0, −1) हैं, एक वर्ग है।

10.4 विभाजन सूत्र (Section Formula)

पिछली कक्षाओं मे हम अध्ययन कर चुके हैं, कि दो बिन्दु A तथा B को मिलाने वाली रेखा AB पर स्थित कोई बिन्दु P, रेखा खण्ड AB को AP : PB के अनुपात में विभाजित करता है। हम यह भी जानतें है, कि यदि, AB रेखा पर बिन्दु P बिन्दुओं A और B के भीतर स्थित हो तो P, AB को अन्ततः (internally) विभाजित करता है अन्यथा P, AB को बाह्यतः (externally) विभाजित करता है।

अब हम बिन्दु P के निर्देशांक ज्ञात करते हैं, जो रेखा खण्ड AB को $l : m$ के अनुपात में विभाजित करता है।

मान लीजिए कि बिन्दु P के निर्देशांक (x, y) हैं।

प्रथम स्थिति–अन्तः विभाजन (Internal Division)

जब P, AB को अन्ततः विभाजित करता है, तो बिन्दुओं A, B तथा P से x–अक्ष पर लम्ब खीचिए, जो x–अक्ष से क्रमशः C, D और Q, बिन्दुओं पर मिलते हैं (आकृति 10.10)। Aऔर P बिन्दुओं से x–अक्ष के समान्तर रेखाएं खींचिए, जो PQ तथा BD से क्रमशः E और R बिन्दुओं पर मिलतें हैं। .

आकृति 10.10 से यह स्पष्ट है कि त्रिभुज AEP और PRB समरूप है और इसलिए

$$\frac{AE}{PR} = \frac{EP}{RB} = \frac{AP}{PB} = \frac{l}{m} \quad (1)$$

अब $AE = CQ = OQ - OC = x - x_1,$

$PR = QD = OD - OQ = x_2 - x,$

$EP = QP - QE = QP - CA = y - y_1,$

और $RB = DB - DR = DB - QP = y_2 - y.$

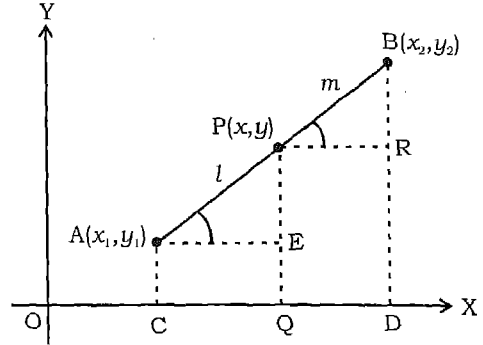
उपर्युक्त मानों को समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं, कि

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{l}{m}$$

इसप्रकार $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{l}{m}$

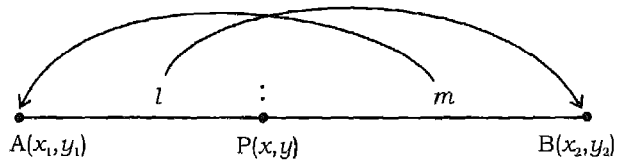
जिससे प्राप्त होता है

$$x = \frac{lx_2 + mx_1}{l + m}.$$

इसीप्रकार $y = \frac{ly_2 + my_1}{l + m}.$

आकृति 10.10

अतः बिन्दु P, जो बिन्दुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ के मिलान को अन्ततः $l : m$ के अनुपात में विभक्त करता है, के निर्देशांक हैं

$$\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \frac{ly_2 + my_1}{l + m}\right) \qquad (2)$$

टिप्पणी : अन्तः विभाजन के विभाजन सूत्र को याद रखने के लिए यह देखना सहायक है, कि l को इससे दूर वाले निर्देशांक से गुणा करना होता है और इसी प्रकार m को भी इससे दूर वाले निर्देशांक से गुणा करके इनके योगफल को $l+m$ से भाग देते है। इसको आकृति 10.11 में वक्र रेखाओं पर तीर के निशान द्वारा दर्शाया गया है।

आकृति 10.11

विशेष स्थितियां

1. बिन्दु A (x_1, y_1) और B (x_2, y_2) को मिलाने वाले रेखा–खण्ड का मध्य बिन्दु, $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ है।

जो कि सूत्र (2) में l और m को 1 से विस्थापित करके हमें प्राप्त होता है।

2. यदि बिन्दु P बिन्दुओं A (x_1, y_1) और B (x_2, y_2) को मिलाने वाले रेखा खण्ड को $(k:1)$ के अनुपात में अन्तः विभाजन करता है, तो P के निर्देशांक $\left(\frac{kx_2+x_1}{k+1}, \frac{ky_2+y_1}{k+1}\right)$ होते हैं। पद–संहति (2) के अंश तथा हर में m का भाग देकर $\frac{l}{m}$ को k से विस्थापित करने पर हम अभीष्ट परिणाम पाते हैं।

द्वितीय स्थिति–बाह्य–विभाजन (External Division)

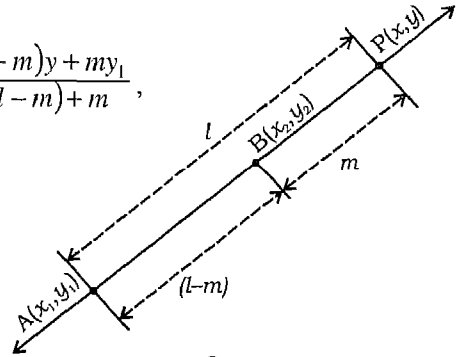
यदि बिन्दु $P(x, y)$ रेखा–खण्ड AB को $l : m$ के अनुपात में बाह्यतः विभक्त करता है, जैसा कि आकृति 10.12 में प्रदर्शित है, तब यह सरलतापूवक्र देखा जा सकता है, कि बिन्दु B, AP को $(l - m) : m$ के अनुपात में अन्ततः विभक्त करता है इस प्रकार सूत्र (2), जो अन्तः विभाजन के बिन्दु के लिए है, के द्वारा

$$x_2 = \frac{(l-m)x + mx_1}{(l-m)+m} \text{ और } y_2 = \frac{(l-m)y + my_1}{(l-m)+m},$$

इस प्रकार $x = \frac{lx_2 - mx_1}{l-m}$ और $y = \frac{ly_2 - my_1}{l-m}$

अतः बिन्दु P के निर्देशांक जो AB रेखा खण्ड के बाह्यतः $l : m$ के अनुपात में विभक्त करता है,

$$\left(\frac{lx_2 - mx_1}{l-m}, \frac{ly_2 - my_1}{l-m}\right)$$

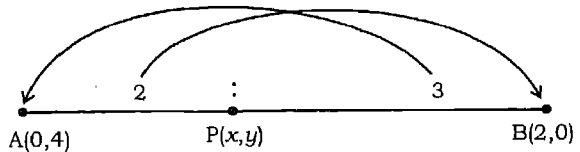
हैं।

आकृति 10.12

एक रेखाखण्ड को (अन्ततः या बाह्यतः) विभाजित करने वाले बिन्दु हेतु निर्देशांक के व्युत्पन्न सूत्र को विभाजन सूत्र (Section formula) कहते हैं।

उदाहरण 7 बिन्दुओं (0, 4) और (2, 0) को मिलाने वाली रेखा पर ऐसा बिन्दु ज्ञात कीजिए, जो रेखाखण्ड को

(i) अन्ततः 2:3 के अनुपात में

(ii) बाह्यतः 3:2 के अनुपात में

विभक्त करता है।

आकृति 10.13

हल (i) यहां बिन्दु (0, 4) और (2, 0) हैं, और विभाजन अन्ततः 2:3 के अनुपात में है।

आकृति 10.13 से बिन्दु P के निर्देशांक

$$\left(\frac{2.2+3.0}{2+3}, \frac{2.0+3.4}{2+3}\right) \text{ या } \left(\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

(ii) यहां अनुपात 3:2 और विभाजन बाह्यतः है जैसा कि आकृति 10.14 में प्रदर्शित है।

अतः आकृति 10.14 के अनुसार बिन्दु P के निर्देशांक

$$\left(\frac{3.2-2.0}{3-2}, \frac{3.0-2.4}{3-2}\right) \text{ या } (6, -8) \text{ हैं।}$$

आकृति 10.14

उदाहरण 8 बिन्दुओं (7, –3) और (5, 2) को मिलाने से बने रेखा–खण्ड को x–अक्ष जिस अनुपात में विभाजित करती है, उसे ज्ञात करें।

हल मान लीजिए कि x–अक्ष पर स्थित बिन्दु $(a, 0)$, AB को $k : 1$ के अनुपात में विभक्त करता है जहाँ A तथा B क्रमशः (7, – 3) और (5, 2) हैं। हमें k का मान ज्ञात करना है। इसके लिए हम केवल बिन्दु के कोटि का प्रयोग करते हैं जो शून्य है।

इसलिए $\quad \dfrac{2k-3}{k+1} = 0$

या $\quad 2k = 3$, अर्थात, $k = \dfrac{3}{2}$.

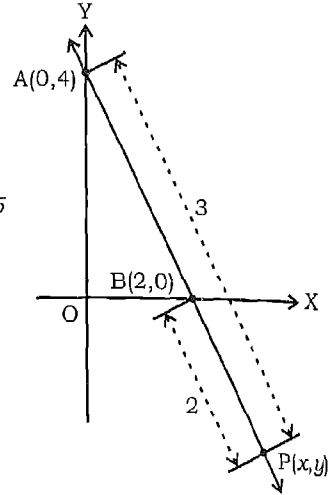
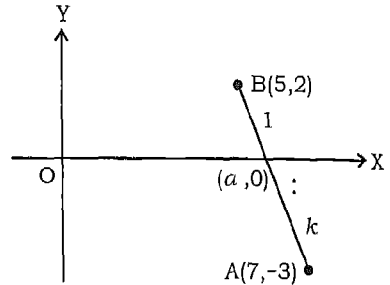
अतः अभिष्ट अनुपात $\dfrac{3}{2} : 1$ अर्थात 3 : 2 है।

आकृति 10.15

उदाहरण 9 सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज जिसके शीर्ष $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ और $C(x_3, y_3)$ हों, उसकी माध्यिकाएं संगामी होती है। संगमन बिन्दु (अर्थात केन्द्रक) के निर्देशांक भी ज्ञात करें।

हल मान लीजिए कि BC, AC तथा AB भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रमशः D, E तथा F हैं। अतः AD, BE और CF त्रिभुज ABC की माध्यिकाएं है। मध्य बिन्दु सूत्र से बिन्दु D, E तथा F के निर्देशांक क्रमशः

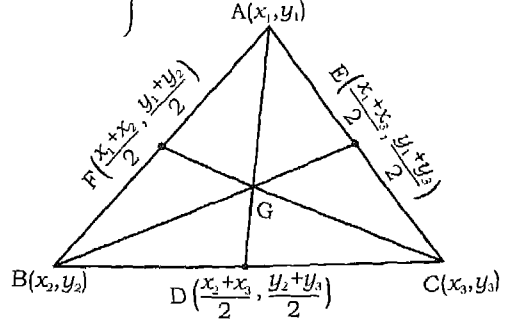
$$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right), \left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right) \text{ और } \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \text{ हैं।}$$

अब बिन्दु G पर विचार करें जो रेखाखण्ड AD को अन्ततः 2 : 1 में विभाजन करता है। विभाजन सूत्र से हम G के निर्देशांक

$$\left(\frac{2\frac{(x_2+x_3)}{2}+1(x_1)}{2+1}, \frac{2\frac{(y_2+y_3)}{2}+1(y_1)}{2+1}\right)$$

अथवा $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

पा सकते हैं।

अब बिन्दु G^* पर विचार करें जो BE को अन्ततः 2:1 के अनुपात में विभक्त करता है। पुनः विभाजन सूत्र द्वारा G^* के निर्देशांक $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ हैं।

A(x_1, y_1)
E$\left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right)$
F$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$
G
B(x_2, y_2)
D$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$
C(x_3, y_3)

आकृति 10.16

इसी प्रकार माध्यिका CF पर स्थित बिन्दु G** का निर्देशांक जो इसे अन्ततः 2:1 में विभक्त करता है $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ हैं। अतः सभी तीन बिन्दु G, G* तथा G** संपाती हैं। उपर्युक्त से स्पष्ट है, कि बिन्दु $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ सभी माध्यिकाओं का सर्वनिष्ठ बिन्दु है। इसलिए त्रिभुज ABC की माध्यिकाएं संगामी हैं। माध्यिकाओं का संगमन–बिन्दु त्रिभुज का केन्द्रक कहलाता है।

अतः त्रिभुज ABC के केन्द्रक के निर्देशांक $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ हैं।

टिप्पणी त्रिभुज के केन्द्रक के उपर्युक्त निर्देशांक का प्रयोग सूत्र के रूप में भी किया जा सकता है।

उदाहरण 10 किसी त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक $(\sqrt{3}, 2)$ हैं। यदि इस त्रिभुज के दो शीर्ष $(2\sqrt{3}, -1)$ और $(2\sqrt{3}, 5)$ हैं, तो त्रिभुज के तीसरे शीर्ष को ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए की त्रिभुज का तीसरा शीर्ष P (x, y) है अतः त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक

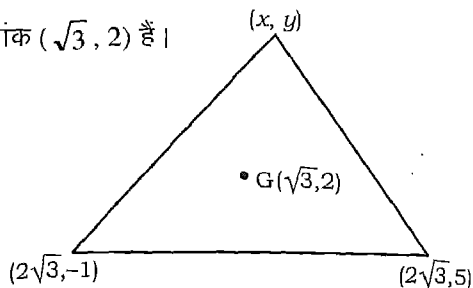
$$\left(\frac{x+2\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{3}, \frac{y-1+5}{3}\right)$$

या $\left(\frac{x+4\sqrt{3}}{3}, \frac{y+4}{3}\right)$ हैं।

परन्तु ज्ञात है, कि त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक ($\sqrt{3}$, 2) हैं।

इसलिए $\frac{x+4\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

या $x=-\sqrt{3}$

और $\frac{y+4}{3}=2$ या $y = 2$.

अतः तीसरे शीर्ष के निर्देशांक $\left(-\sqrt{3}, 2\right)$ हैं।

आकृति 10.17

उदाहरण 11 त्रिभुज जिसके शीर्ष $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ और $C(x_3, y_3)$ हैं, इसके अन्तः केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए तथा यह भी दर्शाइए कि त्रिभुज ABC के कोणों के अन्तः समद्विभाजक संगामी होते हैं।

हल हम जानते हैं, कि त्रिभुज का अन्तः केन्द्र त्रिभुज के कोणों के अन्तः समद्विभाजकों का प्रतिच्छेदन बिन्दु होता है। मान लीजिए कि शीर्ष A, B तथा C की क्रमशः सम्मुख भुजाएं a, b, c हैं।

मान लीजिए कि कोण A का अन्तः समद्विभाजक AD, भुजा BC से बिन्दु D पर मिलता है (आकृति 10.18)। अब

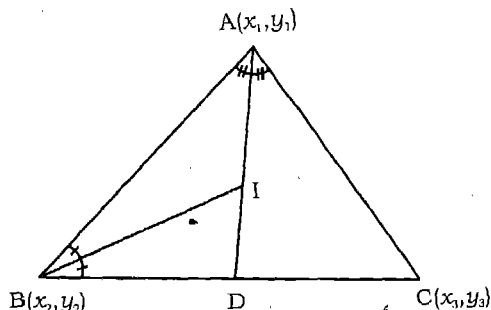
$$\therefore \quad \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}, \tag{1}$$

अर्थात बिन्दु D रेखाखण्ड BC को अन्ततः $c:b$ के अनुपात में विभक्त करता है

इसलिए विभाजन सूत्र से D के निर्देशांक

$$\left(\frac{bx_2+cx_3}{b+c}, \frac{by_2+cy_3}{b+c}\right) \text{ हैं।}$$

मान लीजिए कोण B का अन्तः समद्विभाजक AD से बिन्दु I पर मिलता. त्रिभुज ABD में बिन्दु I, AD को

AB : BD के अनुपात में विभक्त करता हैं अर्थात्

आकृति 10.18

$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD}. \qquad (2)$$

परन्तु समीकरण (1) से हम जानते हैं, कि

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b} \text{ या } \frac{BD}{BC - BD} = \frac{c}{b}$$

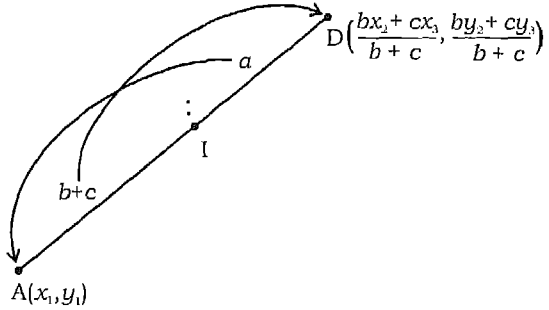
या
$$\frac{BD}{a - BD} = \frac{c}{b} \text{ या } BD = \frac{ac}{b+c}.$$

(2) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{AI}{ID} = \frac{c}{\left(\frac{ac}{b+c}\right)}$$

या
$$\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}.$$

आकृति 10.19

अतः बिन्दु I, AD को अन्ततः (b+c): a के अनुपात में विभक्त करता है (आकृति 10.19)। इसलिए बिभाजन सूत्र से बिन्दु I के निर्देशांक

$$\left(\frac{\frac{\{(b+c)(bx_2+cx_3)\}}{b+c} + ax_1}{a+b+c}, \frac{\frac{\{(b+c)(by_2+cy_3)\}}{b+c} + ay_1}{a+b+c}\right),$$

या
$$\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right) \text{ हैं।}$$

इस परिणाम की सममितता प्रकट करती है कि कोणों B और C के अन्तः समद्विभाजक रेखाएं जिस बिन्दु पर प्रतिच्छेदित करती हैं, उसके निर्देशांक वही हैं जो बिन्दु I के हैं।

इस प्रकार त्रिभुज के कोणों के सभी अन्तः समद्विभाजक संगामी होते हैं, और इनके संगमन बिन्दु के निर्देशांक $\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$ हैं। इस संगमन बिन्दु को त्रिभुज ABC का अन्तः केन्द्र कहते हैं।

प्रश्नावली 10.3

प्रश्न 1 से 5 तक में दिए बिंन्दुओं के अनुसार रेखाखण्ड A B को दिए अनुपात में अन्ततः विभक्त करने वाले बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

1. A (1, –3), B (–3, 9) अनुपात 1 : 3.

2. A (–1, 0), B $(\frac{13}{2}, 0)$ अनुपात 2 : 1.

3. A (–2, –1), B (4, 3) अनुपात 2 : 3.

4. A (5, – 4), B (–3, 2) अनुपात 1 : 2.

5. A (–1, 4), B (0, –3) अनुपात 1 : 4.

निम्नांकित प्रश्न 6 से 9 में दिए गए बिन्दुओं के अनुसार रेखाखण्ड AB को दिए गए अनुपात में बाह्यतः विभक्त करने वाले बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

6. A (6, 4), B (–2, 5) अनुपात 1 : 2.

7. A (0, –4), B (8, 0) अनुपात 4 : 3.

8. A (1, 2), B (–4, –3) अनुपात 2 : 3.

9. A (2, –6), B (4, 3) अनुपात 3 : 2.

10. उस अनुपात को ज्ञात कीजिए, जिसमें बिन्दुओं (2, –3) और (5, 6) को मिलाने वाला रेखाखण्ड (i) x–अक्ष (ii) y–अक्ष द्वारा विभाजित होता है।

11. बिन्दुओं (3, 5) और (–7, 9) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु $\left(\frac{1}{2}, 6\right)$ किस अनुपात में विभाजित है?

प्रश्न 12 से 14 में दिए गये शीर्षों वाले त्रिभुज के केन्द्रक ज्ञात कीजिए।

12. (–1, 4), (5, 2), (–1, 3).

13. (1, –1), (4, 3), (1, 1).

14. (5, 4), (1, 1), (0, 1).

15. उस त्रिभुज के तीसरे शीर्ष को ज्ञात कीजिए, जिसके दो शीर्ष (–2, 4) और (7, –3) हैं तथा उसका केन्द्रक (3, 2) है।

16. उस त्रिभुज के अन्तः केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जिसके शीर्ष (7, –36), (7, 20) और (–8, 0) हैं।

17. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (–2, –1), (1, 0), (4, 3) और (1, 2) एक समान्तर चर्तुभुज के शीर्ष हैं। (**संकेत** : समान्तर चर्तुभुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।)

10.5 त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of a Triangle)

आइए हम उस त्रिभुज, के क्षेत्रफल के लिए सूत्र व्युत्पन्न करते हैं जिसके शीर्ष $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ और $C(x_3, y_3)$ हैं।

बिन्दुओं A, B और C से x–अक्ष पर लम्ब खींचिए, जो उससे बिन्दु L, M और N पर क्रमशः मिलते हैं। आकृति 10.20 से सुस्पष्ट हैं, कि

आकृति 10.20

त्रिभुज ΔABC का क्षेत्रफल = समलम्ब BMLA का क्षेत्रफल + समलम्ब ALNC का क्षेत्रफल – समलम्ब BMNC का क्षेत्रफल (1)

अब आकृति 10.20 से

$$ML = OL - OM = x_1 - x_2,$$

$$LN = ON - OL = x_3 - x_1,$$

और $$MN = ON - OM = x_3 - x_2.$$

साथ ही $MB = y_2$; $LA = y_1$ और $NC = y_3.$

स्मरण कीजिए कि एक समलम्ब का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \text{ (समान्तर भुजाओं का योगफल)} \times \text{(समान्तर भुजाओं के बीच की दूरी)}.$$

इसलिए

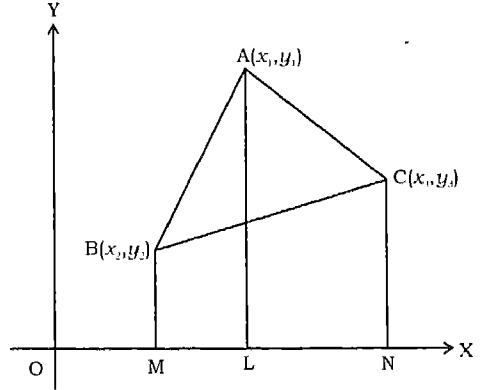
$$\text{समलम्ब BMLA का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} (MB + LA) ML = \frac{1}{2} (y_2 + y_1)(x_1 - x_2)$$

$$\text{समलम्ब ALNC का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} (LA + NC) LN = \frac{1}{2} (y_1 + y_3)(x_3 - x_1)$$

$$\text{और समलम्ब BMNC का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} (MB + NC) MN = \frac{1}{2} (y_2 + y_3)(x_3 - x_2).$$

उपर्युक्त मानों के समीकरण (1) में रखने पर हम पाते हैं कि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} (y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2} (y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2} (y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2} \{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}.$$

कभी कभी क्षेत्रफल की उपर्युक्त पद–संहति ऋणात्मक चिह्न दे सकती है। यह चिह्न वह क्रम इंगित करता है जिसमें शीर्ष A, B तथा C लिए जाते हैं। (घड़ी की सूई के विपरीत दिशा में धनात्मक और घड़ी की सूई की दिशा में ऋणात्मक)। तथापि मात्रा (magnitude) की दृष्टि में क्षेत्रफल का मान शीर्षों के क्रम में परिवर्तन कर देने पर प्रभावित नहीं होता है। इसलिए त्रिभुज के क्षेत्रफल के लिए हम उपर्युक्त व्यंजक का निरपेक्ष मान लेते हैं।

इस प्रकार त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \left| x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2) \right|$

टिप्पणी

1. उपर्युक्त व्यंजक के उपपत्ति में त्रिभुज के सभी शीर्ष प्रथम चतुर्थांश में लिए गए हैं। तथापि यदि शीर्ष विभिन्न चतुर्थांशों में स्थित हों तो त्रिभुज के क्षेत्रफल के लिए हम यही परिणाम पाते हैं।

2. बहुभुज के क्षेत्रफल को भी वैश्लेषिक–ढंग से ज्ञात किया जा सकता है। इसके लिए बहुभुज क्षेत्र को असंयुक्त त्रिभुजों में विभक्त करके उनके क्षेत्रफलों को जोड़ दिया जाता है।

10.5.1 तीन बिन्दुओं के संरेख होने का प्रतिबन्ध

तीन बिन्दु A (x_1, y_1), B(x_2, y_2) और C(x_3, y_3) तब और केवल तब संरेख होते हैं, जब यदि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल शून्य हो। अतः बिन्दु A (x_1, y_1), B(x_2, y_2) और C (x_3, y_3) तभी और केवल तभी संरेख होगें जब

$$\frac{1}{2} \left| x_1 (y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2) \right| = 0$$

अर्थात् $\quad x_1 (y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0.$

उदाहरण 12 उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (4, 4), (3, –2) और (–3, 16) हैं।

हल शीर्षों A(4, 4), B(3, –2) और C(–3, 16) से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\Delta = \frac{1}{2} \left| 4(-2-16) + 3(16-4) + (-3)(4+2) \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| -72 + 36 - 18 \right| = \left| -27 \right|.$$

इसलिए अभीष्ट क्षेत्रफल = 27 वर्ग इकाई

उदाहरण 13 दर्शाइए कि बिन्दु (–1, –1), (2, 3) और (8, 11) एक रेखा में हैं।

हल दिए गए बिन्दुओं को शीर्ष लेकर, बने त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\Delta = \frac{1}{2}\left|-1(3-11)+2\{11-(-1)\}+8(-1-3)\right|$$

$$= \frac{1}{2}|8+24-32| = 0.$$

इसलिए दिए गये बिन्दु संरेख हैं।

उदाहरण 14 x के किन मानों के लिए बिन्दुओं (5, –1), $(x, 4)$ और (6, 3) से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल 5.5 वर्ग इकाई है?

हल दिए गए बिन्दुओं को शीर्ष लेकर, बने त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\Delta = \frac{1}{2}|5(4-3)+x(3+1)+6(-1-4)|$$

$$= \frac{1}{2}|5+4x-30| = \frac{1}{2}|4x-25|.$$

परन्तु ज्ञात है कि त्रिभुज का क्षेत्रफल = 5.5 वर्ग इकाई

अर्थात् $\frac{1}{2}|4x-25| = 5.5$

या $|4x-25| = 11$

अतः या तो $4x-25 = 11$, अर्थात, $x = 9$

या $4x-25 = -11$, अर्थात, $x = \frac{7}{2}$

उदाहरण 15 उस चर्तुभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसके शीर्ष (2, 1) (6, 0) (5, –2) और (–3, –1) हैं।

हल मान लीजिए कि बिन्दु (2, 1), (6, 0), (5, –2) और (–3, –1) क्रमशः A, B, C और D, को व्यक्त करते हैं।

अब त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}|2(0+2)+6(-2-1)+5(1-0)|$$

= 4.5 वर्ग इकाई।

और त्रिभुज ACD का क्षेत्रफल

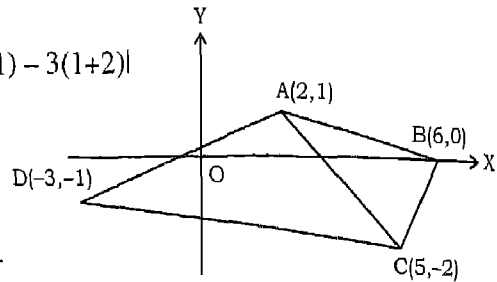
$$= \frac{1}{2}|2\{-2-(-1)\} + 5(-1-1) - 3(1+2)|$$

$= 10.5$ वर्ग इकाई।

आकृति 10.21 से स्पष्ट हैं, कि

आकृति 10.21

चर्तुभुज ABCD = ABC का क्षेत्रफल + त्रिभुज ACD का क्षेत्रफल

$= 4.5 + 10.5 = 15$ वर्ग इकाई

प्रश्नावली 10.4

प्रश्न 1 से 4 तक में दिए बिन्दुओं के शीर्ष वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

1. $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$.

2. $(-2, 1), (2, -3), (4, 4)$.

3. $(3, 8), (-4, 2), (5, -1)$.

4. $(2, 7), (3, -1), (-5, 6)$.

दिखाइए कि प्रश्न 5 से 7 में दिए बिन्दु संरेख हैं।

5. $(2, 4), (0, 1), (4, 7)$.

6. $(-2, 5), (2, -3), (0, 1)$.

7. $(-5, 7), (-4, 5), (1, -5)$.

x के किन मानों के लिए प्रश्न 8 और 9 में दिए गए बिन्दु एक रेखा में होंगे?

8. $(x, -1), (2, 1)$ $(4, 5)$.

9. $(2x, 2x + 2), (3, 2x + 1), (1, x + 1)$.

10. वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए, जिसके अर्न्तगत बिन्दु (x, y), बिन्दुओं $(3, 4)$ और $(-5, -6)$ को मिलाने वाली रेखा पर स्थित होगा।

11. x के किन मानों के लिए बिन्दु $(1, -1)$ $(2, 1)$ और $(4, x)$ संरेख होंगे।

निम्नांकित प्रश्नों 14 और 15 में से प्रत्येक में दिए गए बिन्दुओं के शीर्ष वाले चर्तुभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

14. (0, 0) (6, 0) (4, 3) (0, 3).

15. (0, 0) (a, 0) (a, b), (0, b).

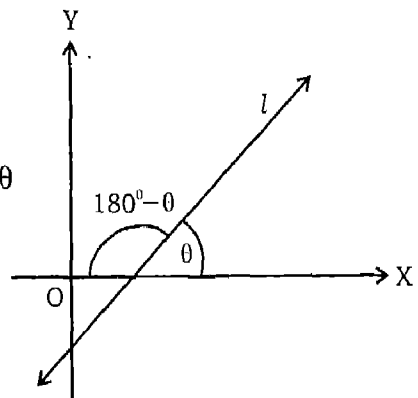
16. एक त्रिभुज जिसके शीर्ष (2, 1), (–2, 3) और (4, –3) हैं, इसकी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं के शीर्ष वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10.6 रेखा की प्रवणता (Slope of a Line)

निर्देशांक तल में एक रेखा x–अक्ष के साथ दो कोण बनाती है, जो परस्पर संपूरक होते हैं। कोण (मान लीजिए, θ) जो रेखा l, x–अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बनाती है, उसे रेखा l का झुकाव (Inclination of the line l) कहते हैं। स्पष्टत: $0° \leq \theta \leq 180°$ (आकृति 10.22) जहाँ, θ धनात्मक अक्ष से घड़ी की सुई की विपरीत दिशा में मापा जाता है।

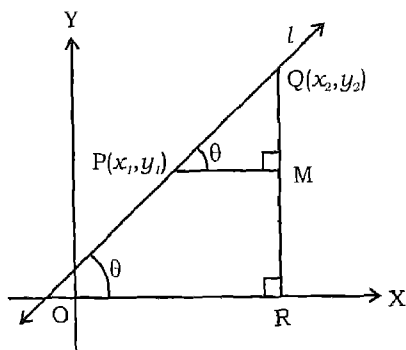
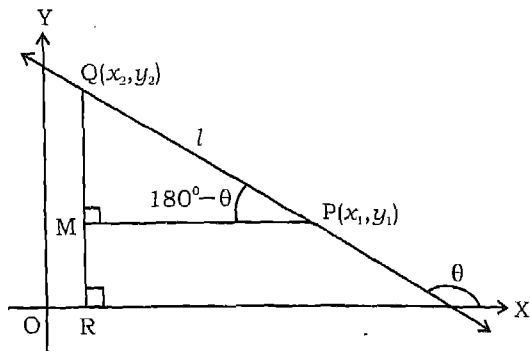
हम देखते हैं, कि x–अक्ष पर संपाती रेखाओं का झुकाव $0°$ होता है। एक ऊर्ध्व रेखा (y–अक्ष के समान्तर या संपाती) का झुकाव $90°$ है।

परिभाषा यदि θ किसी रेखा l का झुकाव है, तो $\tan\theta$ को रेखा l की प्रवणता कहते हैं।

वह रेखा जिसका झुकाव $90°$ है, उसकी प्रवणता परिभाषित नहीं है। एक रेखा की प्रवणता को m से व्यक्त करते हैं।

आकृति 10.22

अत: $m = \tan\theta, \quad \theta \neq 90°$

यह देखा जा सकता है कि x–अक्ष की प्रवणता शून्य होता है और y–अक्ष की प्रवणता परिभाषित नहीं है।

10.6.1 रेखा की प्रवणता, जब उस पर दो बिन्दु दिए गए हों हम जानते हैं, कि यदि एक रेखा पर दो भिन्न बिन्दु ज्ञात हों, तो वह पूर्णतया परिभाषित होती है। अत: हम रेखा की की प्रवणता

आकृति 10.23 (i) आकृति 10.23 (ii)

x–अक्ष पर QR, तथा RQ पर PM लम्ब खींचिए (आकृति 10.23 (i)) और (आकृति 10.23 (ii)).

स्थिति (i) जब θ न्यूनकोण है।

आकृति 10.23 (i) में, ∠MPQ = θ.

इसलिए रेखा l की प्रवणता = $m = \tan\theta$. (1)

परन्तु त्रिभुज Δ MPQ में

$$\tan\theta = \frac{MQ}{MP} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से हम पाते हैं कि $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

स्थिति (ii) जब θ अधिक कोण है।

आकृति 10.23 (ii) में

$$\angle MPQ = (180° - \theta)$$

इसलिए $\theta = 180° - \angle MPQ$.

अब रेखा l की की प्रवणता $= m = \tan\theta$

$$= \tan(180° - \angle MPQ)$$

$$= -\tan\angle MPQ$$

$$= -\frac{MQ}{MP} = -\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

फलतः दोनों स्थितियों में बिन्दु (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से जाने वाली रेखा की प्रवणता

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

टिप्पणी तीन बिन्दु A, B और C संरेख होते हैं यदि और केवल यदि AB की प्रवणता= BC की प्रवणता

10.6.2 दो रेखाओं के समान्तर और परस्पर लम्ब होने का प्रतिबन्ध मान लीजिए कि अऊर्ध्व रेखाओं l_1 और l_2 जो एक निर्देशांक तल में है जिनके की प्रवणता क्रमशः m_1 तथा m_2 है

मान लीजिए कि इनके झुकाव क्रमशः α और β हैं।

यदि l_1 और l_2 समान्तर रेखाएं हैं (आकृति10.24) तब उनके झुकाव समान होगें

यदि $\quad \alpha = \beta$ और $\tan \alpha = \tan \beta$

इसलिए $\quad m_1 = m_2$, अर्थात उनकी प्रवणता बराबर हैं।

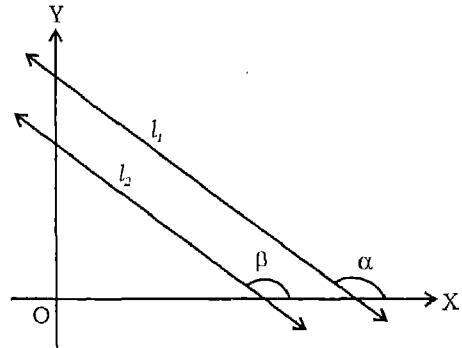
विलोमतः यदि दो रेखाओं l_1 और l_2 की प्रवणता बराबर हैं

अर्थात् $\quad m_1 = m_2$.

तब $\quad \tan \alpha = \tan \beta$

tangent फलन के गुणधर्म से (0^o और 180^o के बीच), $\alpha = \beta$

अतः रेखाएं समान्तर हैं।

अतः दो अऊर्ध्व रेखाएं l_1 और l_2 समान्तर होती है, यदि और केवल यदि उनकी प्रवणता समान हैं

आकृति 10.24

यदि दो रेखाएं l_1 और l_2 परस्पर लम्ब हैं (आकृति 10.25)

तब $\quad \beta = \alpha + 90^o$

इसलिए $\quad \tan \beta = \tan (\alpha + 90^o)$

$$= \quad -\cot \alpha = -\frac{1}{\tan \alpha}$$

आकृति 10.25

अर्थात् $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ or $m_1 m_2 = -1$

विलोमतः यदि $m_1 m_2 = -1$

अर्थात् $\tan \alpha \tan \beta = -1$.

तब, $\tan \alpha = -\cot \beta = \tan (\beta + 90°)$ या

$\tan (\beta - 90°)$

इसलिए α और β का अन्तर 90° है।

अतः रेखाएं l_1 और l_2 परस्पर लम्ब हैं।

अतः दो अऊर्ध्व रेखाएं l_1 और l_2 परस्पर लम्ब होती है, यदि और केवल यदि उनकी प्रवणतायें परस्पर ऋणात्मक प्रतिलोम होती हैं।

अर्थात् $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ या $m_1 m_2 = -1$.

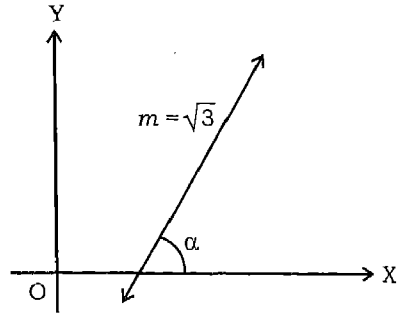
आकृति 10.26

उदाहरण 16 एक रेखा की प्रवणता $m = \sqrt{3}$ दिया गया है। उस रेखा का झुकाव ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि रेखा का झुकाव α है। इसलिए

$$\tan \alpha = \sqrt{3}$$

चूंकि $0° \leq \alpha \leq 180°$ हमें प्राप्त होता है

$$\alpha = 60°.$$

उदाहरण 17 ज्ञात कीजिए कि बिन्दुओं (–2, 6) और (4, 8) से जाने वाली रेखा, बिन्दुओं (8, 12) और (4, 24) से जाने वाली रेखा पर लम्ब, अथवा समान्तर या न तो लम्ब और न समान्तर है।

हल बिन्दुओं (–2, 6) और (4, 8) से जाने वाली रेखा की प्रवणता

$$m_1 = \frac{8-6}{4-(-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

बिन्दुओं (8, 12) और (4, 24) से जाने वाली रेखा की प्रवणता

$$m_2 = \frac{24-12}{4-8} = -3$$

स्पष्टतः $m_1 \neq m_2$. इसलिए रेखाएं समान्तर नहीं है।

तथापि $\quad m_1.m_2 = \frac{1}{3}\ (-3) = -1$.

अतः रेखाएं परस्पर लम्ब हैं।

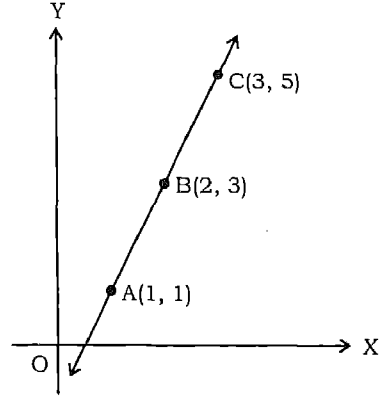
उदाहरण 18 दिखाइए कि बिन्दु (1, 1), (2, 3) और (3, 5) संरेख हैं।

हल मान लीजिए कि बिन्दु (1, 1), (2, 3) और (3, 5) क्रमशः A, B और C हैं। अब

$$\text{AB की प्रवणता} = \frac{3-1}{2-1} = 2$$

और $$\text{BC की प्रवणता} = \frac{5-3}{3-2} = 2 .$$

इसलिए AB की प्रवणता = BC की प्रवणता

अतः बिन्दु A, B और C संरेख हैं

आकृति 10.27

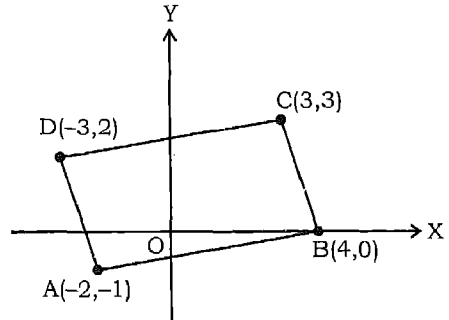
उदाहरण 19 प्रवणता को प्रयुक्त करते हुए सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (–2, –1), (4, 0) (3, 3) और (–3, 2) एक समान्तर चर्तुभुज के शीर्ष हैं।

हल मान लीजिए कि बिन्दु (–2, –1), (4, 0), (3, 3) और (–3, 2) क्रमशः A, B, C और D हैं। अब

$$\text{AB की प्रवणता} = \frac{0-(-1)}{4-(-2)} = \frac{1}{6};$$

$$\text{BC की प्रवणता} = \frac{3-0}{3-4} = -3$$

$$\text{CD की प्रवणता} = \frac{3-2}{3-(-3)} = \frac{1}{6};$$

$$\text{DA की प्रवणता} = \frac{2-(-1)}{-3-(-2)} = -3.$$

आकृति 10.28

स्पष्ट है कि AB और BC की प्रवणता विभिन्न हैं, इसलिए बिन्दु A, B और C संरेख नहीं है। इसी प्रकार बिन्दु A, D और C संरेख नहीं है। अतः दिए बिन्दुओं से एक चर्तुभुज बनता है।

चूंकि AB की प्रवणता = CD प्रवणता इसलिए AB, CD के समान्तर है और BC की प्रवणता = DA की प्रवणता अर्थात BC, DA के समान्तर हैं। इस प्रकार चर्तुभुज ABCD की सम्मुख भुजाएं समान्तर हैं।

अतः दिए गए बिन्दुओं से एक समान्तर चर्तुभुज बनता है।

प्रश्नावली 10.5

1. एक रेखा का झुकाव क्या होगा यदि उसकी प्रवणता

   (i) धनात्मक है (ii) शून्य है (iii) ऋणात्मक है (iv) परिभाषित नहीं है।

2. उस रेखा की प्रवणता क्या होगी, जिसका झुकाव

   (i) $60°$ (ii) $45°$ (iii) $90°$ (iv) $150°$ है

3. उस रेखा का झुकाव क्या होगा, जिसकी प्रवणता

   (i) 1 (ii) $\frac{1}{4}$ (iii) 3 (iv) 0 है।

4. निम्नलिखित बिन्दु युग्मों से जाने वाली रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए

   (i) $(1, 2), (4, 2)$ (ii) $(0, -4), (-6, 2)$ (iii) $(4, -6), (-2, -5)$.

5. दर्शाइए कि बिन्दुओं $(2, -3)$ और $(-5, 1)$ से जाने वाली रेखा बिन्दुओं $(7, -1)$ और $(0, 3)$ से जाने वाली रेखा के समान्तर, तथा बिन्दुओं $(4, 5)$ और $(0, -2)$ से जाने वाली रेखा पर लम्ब है।

बताइए कि निम्नलिखित प्रश्न 6 से 9 तक प्रत्येक में दी गई दो रेखाएं समान्तर हैं या लम्ब हैं, या न तो लम्ब और न समान्तर हैं।

6. बिन्दुओं $(5, 6)$ और $(2, 3)$ से जाने वाली; बिन्दुओं $(9, -2)$ और $(6, -5)$ से जाने वाली

7. $(8, 2)$ और $(-5, 3)$ से जाने वाली; $(16, 6)$ और $(3, 15)$ से जाने वाली

8. $(2, -5)$ और $(-2, 5)$ से जाने वाली; $(6, 3)$ और $(1, 1)$ से जाने वाली

9. $(9, 5)$ और $(-1, 1)$ से जाने वाली; $(8, -3)$ और $(3, -5)$ से जाने वाली

10. x ज्ञात कीजिए जबकि बिन्दुओं $(2, 5)$ और $(x, 3)$ से जाने वाली रेखा की प्रवणता 2 हो।

11. y का वह मान ज्ञात कीजिए ताकि बिन्दुओं $(3, y)$ और $(2, 7)$ से जाने वाली रेखा बिन्दुओं $(-1, 4)$ और $(0, 6)$ से जाने वाली रेखा के समान्तर हो।

12. पैथागोरस प्रमेय का प्रयोग किए बिना दर्शाइए कि बिन्दु $(4, 4)$, $(3, 5)$ और $(-1, -1)$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

13. एक चर्तुभुज के शीर्ष $(-4, 2)$, $(2, 6)$, $(8, 5)$ और $(9, -7)$ हैं। दर्शाइए कि इस चर्तुभुज की भुजाओं के मध्य–बिन्दु एक समान्तर चर्तुभूज के शीर्ष हैं।

10.7 निर्देशांक्षों पर एक रेखा के अन्तः खण्ड (Intercepts)

एक रेखा निर्देशांक्षों का प्रतिच्छेदन कर सकती है अथवा नहीं कर सकती। यदि रेखा निर्देशांक्षों को प्रतिच्छेदित करती है, तो प्रतिच्छेदन बिन्दुओं का विशिष्ट महत्त्व होता है। उस बिन्दु का भुज

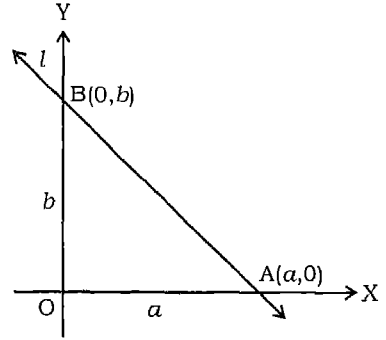
जहां रेखा x–अक्ष को काटती है, उसे x– अन्तः खण्ड (x–intercept), और उस बिन्दु की कोटि जहां रेखा y– अक्ष को काटती है, उसे रेखा का y–अन्तः खण्ड (y–intercept) कहते हैं।

आकृति 10.29

इस प्रकार आकृति 10.29 में

रेखा l का x–अन्तः खण्ड = OA= a

और रेखा l का y–अन्त खण्ड = OB = b.

बिन्दुओं A और B के निर्देशांक क्रमशः $(a, 0)$ और $(0, b)$ हैं (क्यों?)

10.8 बिन्दुपथ और इसका समीकरण (Locus and its Equation)

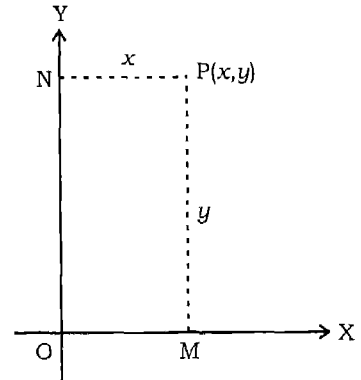
हम जानते हैं, कि बिन्दु को इसके निर्देशांकों के द्वारा एक समकोणिक निर्देशांक तल में निरूपित किया जा सकता है। जब किसी बिन्दु के भुज और कोटि क्रमशः x और y द्वारा निरूपित किया जाय, तब बिन्दु P (x, y) को कार्तीय तल का व्यापक बिन्दु कहते हैं। व्यापक बिन्दु P(x, y) के निर्देशांकों में x और y दोनो चर राशियां है, इसलिए बिन्दु P को एक चर बिन्दु भी कहते है। जब बिन्दु P निर्दिष्ट प्रतिबन्ध के अर्न्तगत गमन करता है, तो P द्वारा अनुरेखित पथबिन्दु का बिन्दुपथ *(locus)* कहलाता है। निर्देशांक ज्यामिति में हमारे समक्ष मुख्यतः दो प्रकार की समस्यायें आती हैं।

1. एक चर बिन्दु का बिन्दुपथ (ज्यामितीय प्रतिबन्ध) दिए जाने पर सगंत समीकरण (बीजगणितीय सम्बंध) प्राप्त करना।
2. समीकरण के दिए होने पर संगत वक्र ज्ञात करना।

10.8.1 बिन्दुपथ का समीकरण

जब एक बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात होता है जो निर्दिष्ट प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है तब हम बिन्दुपथ के व्यापक बिन्दु P(x, y) के भुज x तथा कोटि y के बीच सम्बंध स्थापित करते हैं। यह सम्बंध इस प्रकार का होता है कि यह बिन्दुपथ के सभी बिन्दुओं द्वारा संतुष्ट होता है, x और y के बीच ऐसे सम्बंध को बिंन्दुपथ का समीकरण कहते हैं।

आकृति 10.30

निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा हम बिन्दुपथ के समीकरण ज्ञात करने की विधि स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 20 ऐसे बिन्दु के बिन्दुपथ का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसकी x–अक्ष से दूरी, y–अक्ष की दूरी से सदैव दो गुनी होती है।

हल मान लीजिए कि बिन्दुपथ पर व्यापक बिन्दु $P(x, y)$ है।

अब बिन्दु P की x–अक्ष से लाम्बिक दूरी

= बिन्दु की कोटि $= y$

और P की y– अक्ष से लाम्बिक दूरी

= बिन्दु का भुज $= x$.

प्रश्नानुसार $y = 2x$

अतः यही बिन्दुपथ का अभीष्ट समीकरण है

10.8.2 दिए समीकरण का आलेख

जब एक समीकरण ज्ञात होता है, तब हम वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्मों के समुच्चय (परिमित या अपरिमित) प्राप्त कर सकते हैं, जो दिए गए समीकरण को संतुष्ट करते हैं। इन क्रमित–युग्मों को बिन्दुओं के रूप में अंकित करके हम बिन्दुओं को मिलाकर एक वक्र पाते हैं। इस वक्र को समीकरण का आलेख या बिन्दुपथ कहते हैं।

उदाहरण 21 बिन्दु (x, y) के बिन्दुपथ की व्याख्या कीजिए, जो प्रतिबन्ध $x^2 + y^2 = a^2$ को संतुष्ट करता है।

हल दिया समीकरण $x^2 + y^2 = a^2$ है

हम जानते है कि $\sqrt{x^2 + y^2}$ बिन्दु (x, y) की मूल बिन्दु से दूरी है। इसलिए दिया समीकरण व्यक्त करता है, कि बिन्दु (x, y) की मूल–बिन्दु से दूरी का वर्ग a^2 एक अचर है। इस प्रकार दिया गया समीकरण ऐसे बिन्दुओं के समुच्चय को निरूपित करता है।

हम जानते हैं, कि ऐसे बिन्दुओं का बिन्दुपथ वृत है।

अतः दिया समीकरण $x^2 + y^2 = a^2$ एक वृत निरूपित करता है, जिसका केन्द्र मूल बिन्दु और त्रिज्या a इकाई है।

प्रश्नावली 10.6

1. $(-1, -1)$ और $(4, 2)$ से समान दूरी पर होने वाले बिन्दुओ के सम्मुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

2. ऐसे बिन्दुओं के समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(4, 2)$ और x–अक्ष से समान दूरी पर हैं।

3. बिन्दुओं P (x, y) से बने समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जब रेखा OP की प्रवणता 3 है तथा मूल–बिन्दु O है।

4. ऐसे बिन्दुओं के समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए, जबकि प्रत्येक की कोटि संगत भुज से दी गई दूरी से बड़ी है।

5. ऐसे बिन्दुओ के समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए कि जिनकी बिन्दुओं (0, 2) और (0, –2) से दूरियों का योगफल 6 है।

6. बिन्दु P (x, y) के समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसमे रेखा OP बिन्दु P तथा (3, 2) को मिलाने वाली रेखा के संपाती हो।

7. बिन्दुओं (a^2+b^2, a^2-b^2) और (a^2-b^2, a^2+b^2) से समान दूरी पर होने वाले बिन्दुओं के समीकरण का समुच्चय ज्ञात कीजिए।

प्रश्नो 8 से 11 तक में दिए गए प्रतिबन्धों को संतुष्ट करने वाले बिन्दुओं के बिन्दुपथ का समीकरण ज्ञात कीजिए।

8. बिन्दु की अक्षों से दूरीयों के वर्ग का योगफल p^2 हो।

9. बिन्दु की (3, 2) से दूरी, बिन्दु (1, 1) से दूरी का दो गुना हो।

10. बिन्दु का x–अक्ष से दूरी का वर्ग, मूल बिन्दु से दूरी का दोगुना हो।

प्रश्नों 11 और 12 में दिए समीकरणों को संतुष्त करने वाले बिन्दु (x, y) के बिन्दुपथ की विवेचना कीजिए।

11. $x - y = 0$

12. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$

विविध उदाहरण

उदाहरण 22 एक समबाहु त्रिभुज के दो शीर्ष (0, 0) और $(0, 2\sqrt{3})$ हैं। तीसरा शीर्ष ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि त्रिभुज का तीसरा शीर्ष P (x, y) है और दिए शीर्ष (0, 0) और $(0, 2\sqrt{3})$ क्रमशः O और A हैं। अब

$$\text{OP} = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\text{OA} = \sqrt{(0-0)^2+(0-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{12}$$

और $\quad AP = \sqrt{(x-0)^2+\left(y-2\sqrt{3}\right)^2}$

$$= \sqrt{x^2+y^2-4\sqrt{3}y+12}\,.$$

चूंकि त्रिभुज समबाहु है, इसलिए

$$OP = OA = AP,$$

अर्थात् $\quad x^2 + y^2 = 12 = x^2 + y^2 - 4\sqrt{3}\,y + 12.$

इस प्रकार $\quad x^2 + y^2 = 12 \qquad (1)$

और $\quad x^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 4\sqrt{3}\,y + 12.$

या $\quad 4\sqrt{3}\,y - 12 = 0$

या $\quad y = \sqrt{3} \qquad (2)$

(1) और (2) से हमें प्राप्त होता है $x^2 + (\sqrt{3})^2 = 12$

या $\quad x^2 = 9$

या $\quad x = \pm 3$

अतः त्रिभुज का तीसरा शीर्ष $\left(3,\sqrt{3}\right)$ या $\left(-3,\sqrt{3}\right)$ है।

उदाहरण 23 बिन्दुओं $(a, -b)$ तथा (a, b) को मिलाने वाला रेखा खण्ड मूल बिन्दु पर θ कोण अन्तरित करता है तो $\cos\theta$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $(a, -b)$ और (a, b) क्रमशः बिन्दुओं A और B के निर्देशांक हैं। अब त्रिभुज OAB में हमें दिया गया है कि $\angle BOA = \theta$. अब दूरी सूत्र द्वारा

$$OA = \sqrt{(0-a)^2+(0+b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$OB = \sqrt{(0-a)^2+(0-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

और $\quad AB = \sqrt{(a-a)^2+(-b-b)^2} = 2b\,.$

त्रिभुज OAB समद्विबाहु है, इसलिए कोण BOA का समद्विभाजक OD, भुजा AB का लम्ब समद्विभाजक भी है।

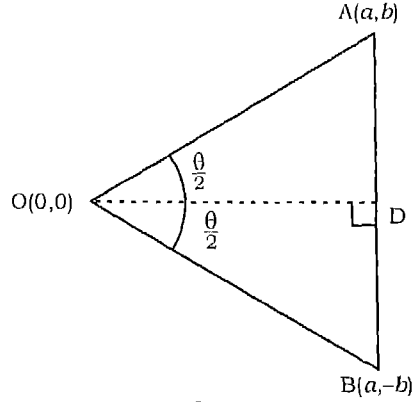
त्रिभुज ODB से

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

हमें ज्ञात है कि

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

इसलिए

$$\cos\theta = 1 - \frac{2b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

आकृति 10.31

उदाहरण 24 बिन्दुओं P, Q, R और S के निर्देशांक क्रमशः (–3, 5), (4, –2), (p, $3p$) और (6, 3), हैं और त्रिभुजों PQR और QRS के क्षेत्रफलों में 2 : 3 का अनुपात है तो p का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिए बिन्दुओं से त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल

$$\Delta\,PQR = \frac{1}{2}\left|-3(-2-3p) + 4\,(3p-5) + p\,(5+2)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|14(2p-1)\right|$$

और त्रिभुज QRS का क्षेत्रफल

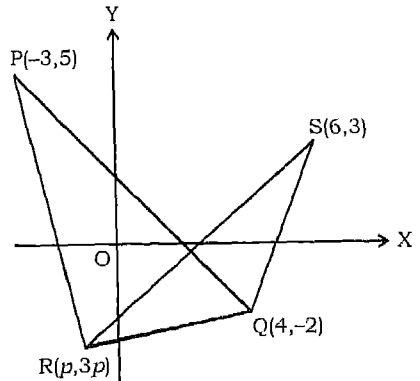
$$\Delta QRS = \frac{1}{2}\left|4(-3p-3) + p(3+2) + 6(-2-3p)\right|$$

$$= \frac{1}{2}|25p+24|.$$

प्रश्नानुसार Δ PQR : Δ QRS = 2 : 3. इसलिए

$$\left|\frac{28p-14}{25p+24}\right| = \frac{2}{3},$$

अर्थात् $$\frac{28p-14}{25p+24} = \frac{2}{3} \text{ या } \frac{28p-14}{25p+24} = -\frac{2}{3}.$$

अतः $$p = \frac{45}{17} \text{ या } p = \frac{-3}{67}.$$

आकृति 10.32

उदाहरण 25 दो बिन्दुओं A तथा B के निर्देशांक क्रमशः (–1, 4) और (5, 1) हैं। बिन्दु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो कि AB के बढ़ाए गए भाग पर इस प्रकार स्थित है कि इसकी B से दूरी, A से दूरी की तीन गुनी है।

हल मान लीजिए कि बिन्दु P के निर्देशांक (x, y) हैं। ज्ञात है, कि P की B से दूरी अर्थात BP, P की A से दूरी की तीन गुनी है।

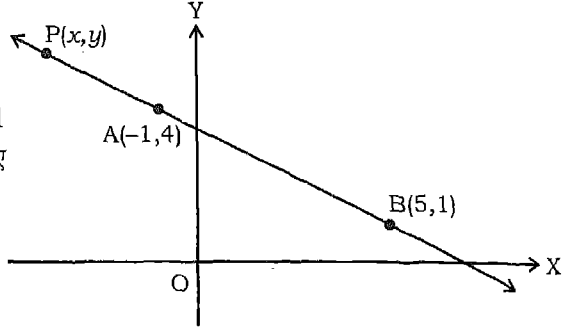
अर्थात

$$BP = 3\ AP.$$

अतः P, रेखाखण्ड AB को बाह्यतः 3 : 1 के अनुपात में विभक्त करता है। इसलिए विभाजन सूत्र से हम पाते हैं, कि

$$x = \frac{3(-1)-5}{3-1} = -4$$

और $$y = \frac{3(4)-1}{3-1} = \frac{11}{2}$$

P(x,y), A(–1,4), B(5,1), O, X, Y

आकृति 10.33

इस प्रकार अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक $\left(-4, \frac{11}{2}\right)$ हैं।

उदाहरण 26 सिद्ध कीजिए कि किसी आयत के विकर्णों के वर्गों का योगफल भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर है।

हल मान लीजिए ABCD एक आयत है तथा A मूल बिन्दु और आयत की संलग्न भुजाएं A से जाने वाले निर्देशांक्षो पर पड़ती हैं। मान लीजिए कि आयत की भुजाएं a और b हैं। इस प्रकार

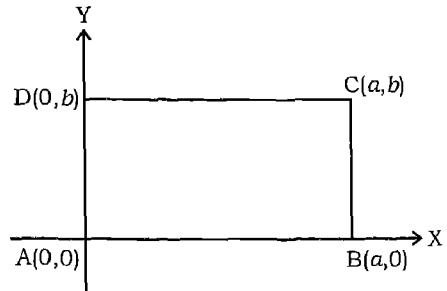
A के निर्देशांक (0, 0) हैं

B के निर्देशांक $(a, 0)$ हैं

D के निर्देशांक $(0, b)$ हैं

और C के निर्देशांक (a, b) हैं।

अब $AB = DC = a$ और $AD = BC = b$.

D(0,b), C(a,b), A(0,0), B(a,0), X, Y

आकृति 10.34

इसलिए

$$AC = \sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

और $$BD = \sqrt{(a-0)^2+(0-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

अतः $(AC)^2 + (BD)^2 = (a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)$,

अर्थात् $(AC)^2 + (BD)^2 = 2a^2 + 2b^2$ (1)

और $(AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (AD)^2 = a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = 2(a^2 + b^2)$. (2)

समीकरण (1) और (2) से निष्कर्ष निकलता है, कि

$$(AC)^2 + (BD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (AD)^2$$

अर्थात आयत के विकर्णो के वर्गो का योगफल भुजाओं के वर्गो के योगफल के बराबर होता है।

अध्याय 10 पर विविध प्रशनावली

1. दूरी–सूत्र के प्रयोग से सिद्व कीजिए कि बिन्दुओ (6, 2), (0, 4) और (4, 6) से जाने वाले वृत का केन्द्र (3, 3) हैं। वृत की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

2. $-\frac{2}{3}$ प्रवणता वाली रेखा, ऊर्ध्व रेखा के साथ किस मान का न्यून कोण बनाती है?

3. A(2, 3) और B(–3, 5) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को उसके मूल लम्बाई के बराबर दोनों ओर बढ़ाया गया है। नए सिरों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

4. A (6, 3) को B(–1, –4) से मिलाने वाले रेखा–खण्ड की लम्बाई इसकी दोनों ओर अपनी लम्बाई की आधी दूरी तक बढ़ाकर दो गुनी कर दी गई है। नए सिरों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

5. एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दु (3, 4), (4, 1) तथा (2, 0) हैं।त्रिभुज के शीर्षो को ज्ञात कीजिए।

6. एक त्रिभुज के शीर्ष (2, 2), (0, 6) और (8, 10) हैं। त्रिभुज के प्रत्येक माध्यिका के त्रिसम–विभाजक बिन्दु का निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो विपरीत भुजा के निकटतर हैं।

7. एक सम–चर्तुभुज के तीन क्रमागत शीर्ष (5, 3), (2, 7) और (–2, 4) हैं। चौथे शीर्ष को ज्ञात कीजिए।

8. किसी त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दु $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ और $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ हैं। त्रिभुज के अन्तः केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

9. त्रिभुज के शीर्ष A(1, 2), B(–3, 6) और C(5, 4) हैं। यदि शीर्षो A, B तथा C के सम्मुर भुजाओं के मध्यबिन्दु क्रमशः D, E और F हों, तो सिद्व कीजिए की त्रिभुज ABC का क्षेत्रफ त्रिभुज DEF के क्षेत्रफल का चार गुना है।

10. x के मानों को ज्ञात कीजिए जबकी बिन्दु $(2x, 2x)$, $(3, 2x + 1)$ और $(1, 0)$ संरेख हों।

11. बिन्दु $(a, 0)$, $(0, b)$ और (x, y) संरेख हैं। प्रवणता को प्रयुक्त करके सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

12. तीन बिन्दु A (x_1, y_1), B(x_2, y_2) और C(x, y) संरेख हैं तो सिद्ध कीजिए कि

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1).$$

सरल रेखा और सरल रेखा–कुल (STRAIGHT LINE AND FAMILY OF STRAIGHT LINES)

अध्याय 11

11.1 भूमिका

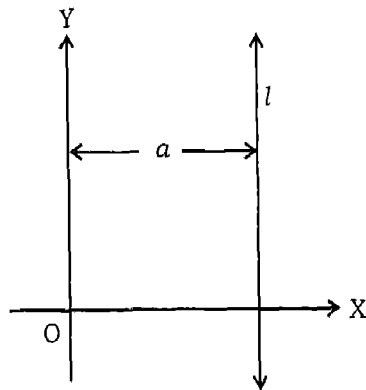
सरल रेखा सरलतम ज्यामितीय वक्र है। इसकी सरलता के अतिरिक्त सरल रेखा गणित की महत्वपूर्ण संकल्पना है, जो हमारे दैनिक जीवन में अनेक रोचक और उपयोगी ढंग से प्रवेश करती है। पिछले अध्याय में हम अध्ययन कर चुके हैं कि प्रत्येक रेखा का साहचर्य एक समीकरण से होता है। रेखा का समीकरण रेखा के व्यापक बिन्दु के भुज और कोटि के मध्य एक सम्बन्ध होता है, जो समुचित प्रतिबन्ध के अर्न्तगत रेखा को संतुष्ट करता है। उदाहरणतः एक सरल रेखा (या सामान्यतः एक रेखा) अद्वितीयतः ज्ञात हो जाती है यदि यह दिए गए बिन्दु से गुजरती है और इसकी प्रवणता ज्ञात हो, अथवा यह दो दिए गए बिन्दुओं से होकर गुजरती है।

11.2 रेखा के समीकरण के अनेक रूप (Various Forms of Equation of a Line)

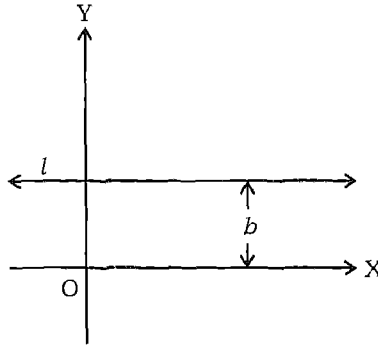
इस अनुभाग में, हम रेखा के समीकरण के अनेक रूपों को व्युत्पन्न करेंगें, जिसमें अक्षों के समान्तर और उनसे झुकी हुई रेखाएं (Oblique lines) भी सम्मिलित हैं।

11.2.1 निर्देशांक्षो के समान्तर रेखाओं का समीकरण

हम जानते हैं, कि x–अक्ष पर स्थित समस्त बिन्दुओं का कोटि शून्य होता है। इस प्रकार x–अक्ष पर स्थित व्यापक बिन्दु $P(x,y)$ के लिए हम सदैव $y = 0$ पाते है। अतः x–अक्ष का समीकरण $y = 0$ होता है। ठीक इसी प्रकार y–अक्ष का समीकरण $x = 0$ होता है।

$y -$ अक्ष के समान्तर रेखा l के लिए, इस पर स्थित व्यापक बिन्दु $P(x, y)$ का भुज एक अचर (मान लीजिए a) होता है। तथापि उसकी कोटि निरन्तर परिवर्तित होती

आकृति 11.1

रहती है (आकृति 11.1)। अतः इस रेखा का समीकरण $x = a$ है।

इसी प्रकार, x – अक्ष के समान्तर रेखा l के लिए, (आकृति 11.2) इस रेखा पर स्थित किसी बिन्दु $P(x, y)$ की कोटि अचर, मान लीजिए b रहता है जो रेखा के x–अक्ष से निर्देशित दूरी के बराबर है। अतः x–अक्ष के समान्तर किसी रेखा का समीकरण $y = b$ है।

आकृति 11.2

उदाहरण 1 x–अक्ष के समान्तर उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x–अक्ष से 3 इकाई नीचे है।

हल x–अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण $y = b$ है। अब चूंकि रेखा x–अक्ष से 3 इकाई नीचे है, अतः $b = -3$.

इस प्रकार रेखा का अभीष्ट समीकरण $y = -3$ है।

उदाहरण 2 बिन्दु $(3, -4)$ से होकर जाने वाली y – अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल चूंकि रेखा $(3, -4)$ से होकर जाती है, तथा y–अक्ष के समान्तर है, अतः रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु का भुज 3 है, अर्थात रेखा पर स्थित सभी बिन्दुओं के लिए $x = 3$ अवश्य होगा।

इस प्रकार रेखा का अभीष्ट समीकरण $x = 3$ है।

प्रश्नावली 11.1

1. x–अक्ष के समान्तर तथा इससे 2 इकाई ऊपर स्थित रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

2. y–अक्ष के समान्तर तथा इससे 3 इकाई दाँई ओर स्थित रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

x–अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो

3. बिन्दु (3, –4) से होकर जाती है।
4. y–अक्ष पर अन्तः खण्ड – 2 काटती है।
5. बिन्दु (0, 2) से होकर जाती है।

प्रश्न 6, 7 में x–अक्ष पर लम्ब रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो

6. मूल–बिन्दु से होकर जाती है।
7. बिन्दु (–1, – 1) से होकर जाती है।

11.2.2 रेखा का समीकरण प्रवणता–अन्तः खण्डरूप में

एक रेखा l अद्वितीयतः ज्ञात हो जाती है, यदि उसकी प्रवणता और y–अन्तः खण्ड ज्ञात हो। इनकी सहायता से प्राप्त रेखा के समीकरण को प्रवणता–अन्तः खण्ड रूप कहते हैं।

मान लीजिए m रेखा l की प्रवणता और c उसका y–अन्तः खण्ड है। मान लीजिए कि यह रेखा y–अक्ष को बिन्दु A पर काटती है, और रेखा द्वारा x–अक्ष की धन दिशा से बनाया गया कोण α है (आकृति 11.3)। तब

$$\text{OA} = c \quad \text{और} \quad m = \tan \alpha$$

मान लीजिए कि P(x,y) रेखा l पर कोई बिन्दु है।

x–अक्ष पर PM लम्ब खींचिए जो A से x–अक्ष के समांतर रेखा को N पर काटती है।

इसलिए $\quad \text{OM} = x \quad \text{और} \quad \text{MP} = y$

$$\angle\text{NAP} = \alpha,$$

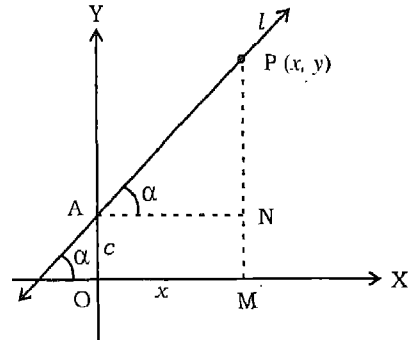
$$\text{NP} = \text{MP} - \text{MN}$$

$$= \text{MP} - \text{OA} = y - c$$

और $\quad \text{AN} = \text{OM} = x$

त्रिभुज NAP में, $\tan \alpha = \dfrac{y-c}{x}$

या $\quad m = \dfrac{y-c}{x}$

या $\quad y = mx + c$

आकृति 11.3

अर्थात $\quad y =$ (रेखा की प्रवणता) $x +$ (y – अन्तःखण्ड)

यही रेखा का समीकरण प्रवणता–अन्तः खण्ड रूप में है।

उपप्रमेय यदि रेखा की प्रवणता m और x–अन्तःखण्ड d हो, उसका समीकरण

$$y = m\,(x - d)$$

होता है

उपपत्ति मान लीजिए कि रेखा x–अक्ष को B बिन्दु पर मिलती है

अतः B के निर्देशांक $(d\,, 0)$ हैं (आकृति 11.4)।

मान लीजिए कि रेखा l पर कोई बिन्दु $P(x, y)$ है। तब बिन्दुओं B और P से जाने वाली रेखा l की प्रवणता $m = \dfrac{y-0}{x-d} = m$, है।

आकृति 11.4

अतः $\quad y = m\,(x - d)$,

जो रेखा का अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 3 (i) उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी प्रवणता 3 और y–अन्तःखण्ड –2 है।

(ii) उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका x–अन्तःखण्ड 4 है और x–अक्ष की धन–दिशा के साथ बना कोण 60° है।

हल (i) ज्ञात है कि, रेखा की प्रवणता $m = 3$ और y–अन्तःखण्ड $c = -2$

इसलिए प्रवणता–अन्तःखण्ड रूप द्वारा रेखा का अभीष्ट समीकरण $y = 3\,x - 2$ है।

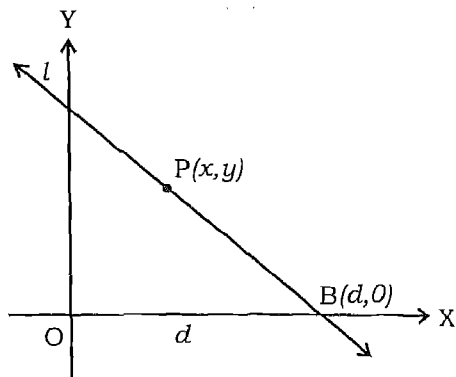
(ii) रेखा m की प्रवणता $= \tan 60° = \sqrt{3}$

और x–अन्तःखण्ड = 4. इसलिए रेखा का अभीष्ट समीकरण है

$$y = \sqrt{3}\ (x - 4)$$

11.2.3 रेखा के समीकरण का बिन्दु–प्रवणता रूप

मान लीजिए रेखा l का एक अचर बिन्दु $P_1\,(x_1, y_1)$ है तथा रेखा की प्रवणता m है।

यदि रेखा l पर कोई अन्य बिन्दु $P\,(x, y)$ है (आकृति 11.5), तो P_1 और P को मिलाने वाली रेखा

आकृति 11.5

की प्रवणता $\frac{y-y_1}{x-x_1}$ है, जो m के बराबर ज्ञात है।

अतः $$m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$$

या $$y - y_1 = m\,(x - x_1) \qquad (1)$$

विलोमतः यदि कोई बिन्दु $P(x, y)$ समीकरण (1) को संतुष्ट करता है तब रेखा P_1P की प्रवणता $\frac{y-y_1}{x-x_1}$ है। परन्तु समीकरण (1) से स्पष्ट है, कि यह प्रवणता m है।

इसका अर्थ यह है कि बिन्दु $P(x , y)$ रेखा l पर है, जो बिन्दु $P_1\,(x_1, y_1)$ से होकर जाती है, तथा उसकी प्रवणता m है।

अतः निष्कर्ष यह है, कि प्रत्येक क्रमित–युग्म जो समीकरण (1) को सन्तुष्ट करता है, वह रेखा l पर है। इससे स्पष्ट है, कि समीकरण $y - y_1 = m\,(x - x_1)$ उन सभी बिन्दुओं को निरूपित करता है, जो रेखा l पर हैं, जो बिन्दु (x_1, y_1) से जाती है, तथा उसकी प्रवणता m है।

रेखा के समीकरण के इस रूप को बिन्दु–प्रवणता रूप कहते हैं।

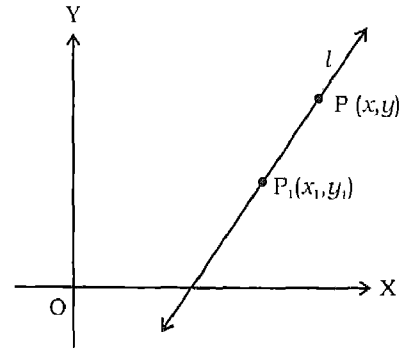
टिप्पणी यदि $P_1\,(x_1, y_1)$ से जाने वाली रेखा y–अक्ष के समान्तर है तब इसकी प्रवणता परिभाषित नहीं है। अतः बिन्दु–प्रवणता रूप वाली रेखा का समीकरण इस स्थिति में प्रयुक्त नहीं होता है।

उदाहरण 4 बिन्दु (–1, –2) से होकर जाने वाली रेखा, जिसकी प्रवणता $\frac{4}{7}$ है, का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल हमें ज्ञात है कि $x_1 = -1$, $y_1 = -2$ और $m = \frac{4}{7}$.

इन मानों को समीकरण के बिन्दु–प्रवणता रूप में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं

$$y - (-2) = \frac{4}{7}\,[x - (-1)]$$

या $$7(y + 2) = 4(x + 1)$$

या $\quad 7y = 4x - 10,$

जो अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 5 मूल–बिन्दु से होकर जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात करें, जो x–अक्ष की धन दिशा के साथ 45° का कोण बनाती है।

आकृति 11.6

हल चूँकि रेखा मूल बिन्दु से गुजरती है इसलिए रेखा पर एक बिन्दु (0 , 0) है।

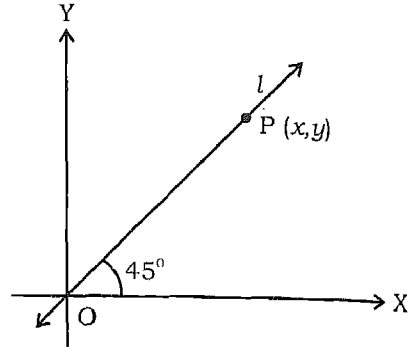
साथ ही, रेखा द्वारा x–अक्ष की धन दिशा के साथ बनाया कोण 45° है। इसलिए रेखा की प्रवणता

$$m = \tan 45° = 1.$$

समीकरण के बिन्दु–प्रवणता रूप के प्रयोग से,

$$y - 0 = 1(x - 0)$$

या $\quad y = x$

जो अभीष्ट समीकरण है।

11.2.4 सममित रूप और एक रेखा के प्राचल समीकरण

मान लीजिए कि रेखा l बिन्दु A (x_1, y_1) से होकर जाती है, और x–अक्ष की धन दिशा के साथ कोण θ बनाती है। ऐसी स्थिति में x_1, y_1 और θ के पदों में व्यक्त सरल रेखा l का समीकरण सममित रूप कहलाता है।

मान लीजिए कि P(x,y) रेखा l पर कोई बिन्दु है और मान लीजिए कि AP $= r$ (आकृति 11.7)। बिन्दुओं A तथा P से x–अक्ष पर क्रमशः AB तथा PM लम्ब खींचिए, AN, PM पर लम्ब खींचिए। तब

$$AN = BM = OM - OB = x - x_1$$

और $\quad NP = MP - MN = y - y_1.$

रेखा का झुकाव θ है। इसलिए $\angle NAP = \theta$.

अब त्रिभुज ANP से हमें प्राप्त होता है

$$\cos\theta = \frac{AN}{AP} = \frac{x - x_1}{r} \quad (1)$$

और $$\sin\theta = \frac{NP}{AP} = \frac{y - y_1}{r} \qquad (2)$$

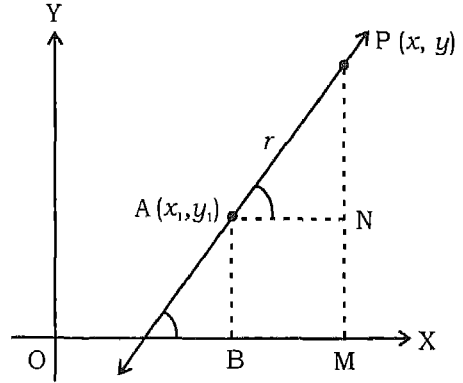
आकृति 11.7

(1) और (2) से हम पाते हैं कि

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta}$$

इस समीकरण को रेखा के समीकरण का सममित रूप कहते हैं।

समीकरण (1) और (2) से हम पाते हैं

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r.$$

इस प्रकार $x = x_1 + r\cos\theta$ और $y = y_1 + r\sin\theta$

इन्हें रेखा के समीकरण का प्राचल रूप कहते हैं जिनमें r प्राचल है। r के विभिन्न मानों के संगत हम रेखा के विभिन्न बिन्दु पाते हैं।

उदाहरण 6 उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (–2 , 3) से जाती है, और x–अक्ष की धन दिशा के साथ 60° का कोण बनाती है।

हल रेखा का सममित रूप में समीकरण है

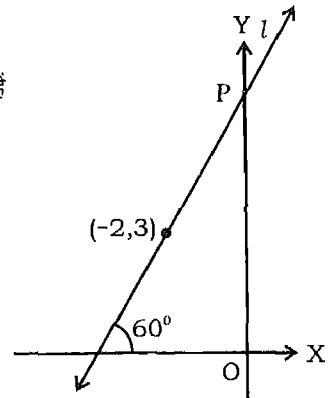
$$\frac{y - y_1}{\sin\theta} = \frac{x - x_1}{\cos\theta}$$

$x_1 = -2$, $y_1 = 3$ और $\theta = 60°$ प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं

$$\frac{y-3}{\sin 60^{\circ}} = \frac{x-(-2)}{\cos 60^{\circ}}$$

या $$\frac{y-3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x+2}{\frac{1}{2}}$$

या $$\sqrt{3}\,x - y + 3 + 2\sqrt{3} = 0$$

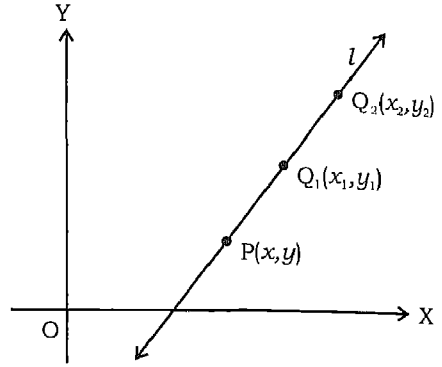
यह रेखा का अभीष्ट समीकरण है।

आकृति 11.8

11.2.5 रेखा के समीकरण का दो–बिन्दु रूप

आकृति 11.9

मान लीजिए दो दिए बिन्दु Q_1 (x_1, y_1) और Q_2 (x_2, y_2) से होकर जाने वाली रेखा l है। मान लीजिए इस रेखा पर कोई स्वेच्छ बिन्दु $P(x, y)$ है।

यदि $x_1 = x_2$ तब रेखा l, y-अक्ष के समान्तर है। अतः इसका समीकरण $x = x_1$ है।

यदि $x_1 \neq x_2$ तो बिन्दु Q_1, P और Q_2 संरेख हैं (आकृति 11.9)। इस प्रकार

PQ_1 की प्रवणता = Q_1Q_2 की प्रवणता

इसलिए $$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \qquad (1)$$

जो रेखा Q_1Q_2 का अभीष्ट समीकरण है

विलोमतः, यदि एक बिन्दु $P(x, y)$ समीकरण (1) को संतुष्ट करता है तब यह इंगित करता है कि

PQ_1 की प्रवणता = Q_2Q_1 की प्रवणता

इस प्रकार बिन्दु P, Q_1 और Q_2 संरेख हैं अर्थात Q_1 और Q_2 से होकर जाने वाली रेखा पर P स्थित है। इस प्रकार रेखा l, उन समस्त बिन्दुओं का समुच्चय है, जिनके निर्देशांक निम्नलिखित समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

इसलिए दो बिन्दुओ (x_1, y_1) और (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण है

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

या $$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

रेखा के इस समीकरण को 'दो–बिन्दु रूप' कहते हैं।

उदाहरण 7 बिन्दुओं (2, 3) और (5, –2) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए

हल रेखा का दो–बिन्दु रूप में समीकरण इस प्रकार है:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad (1)$$

$x_1 = 2,\ y_1 = 3,\ x_2 = 5$ और $y_2 = -2$ समीकरण (1) में रखने पर

$$y - 3 = \frac{-2-3}{5-2}(x-2)$$

या $$y - 3 = \frac{-5}{3}(x-2)$$

या $$5x + 3y - 19 = 0,$$

जो रेखा का अभीष्ट समीकरण है।

11.2.6 रेखा के समीकरण का 'अन्तः खण्ड रूप'

मान लीजिए कि रेखा द्वारा अक्षों पर कटे अन्तःखण्ड a तथा b क्रमशः x–अक्ष तथा y–अक्ष पर हैं, तो रेखा के x–अक्ष तथा y–अक्ष पर प्रतिच्छेदित बिन्दु क्रमशः A $(a, 0)$ और B $(0, b)$ होंगे (आकृति 11.10)।

आकृति 11.10

चूकिं रेखा के दो बिन्दु ज्ञात हैं इसलिए रेखा समीकरण के 'दो बिन्दु रूप' का प्रयोग करने से प्राप्त समीकरण

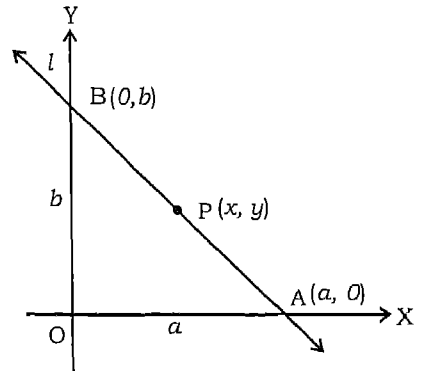
$$y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x - a)$$

या $$y = -\frac{b}{a}(x - a)$$

या $$ay + bx = ab$$

या $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

इस प्रकार x– अक्ष और y–अक्ष पर क्रमशः a तथा b अन्तःखण्ड वाली रेखा का समीकरण

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

अर्थात् $$\frac{x}{x\text{-अन्तः खण्ड}} + \frac{y}{y\text{-अन्तः खण्ड}} = 1.$$

रेखा के समीकरण का यह रूप 'अन्तःखण्ड' रूप कहलाता है।

उदाहरण 8 अक्षों से समान अन्तःखण्ड काटने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (2, 3) से होकर जाती है।

हल मान लीजिए कि रेखा द्वारा अक्षों पर बना प्रत्येक अन्तःखण्ड 'a' है। इसलिए अन्तःखण्ड रूप में रेखा का समीकरण

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \text{ अर्थात, } x+y=a. \qquad (1)$$

चूँकि यह रेखा बिन्दु (2,3) से होकर जाती है, इसलिए

$$2+3=a \quad \text{या} \quad a=5$$

समीकरण (1) में a का मान रखने पर हमें अभीष्ट समीकरण प्राप्त होता है।

$$x+y=5$$

उदाहरण 9 उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए, जो अक्षों पर ऐसे अन्तःखण्ड काटती हैं, जिनका योगफल तथा गुणनफल क्रमशः 1 और – 6 हैं।

हल मान लीजिए कि x–अक्ष तथा y–अक्ष के अन्तःखण्ड क्रमशः a और b हैं।

इसलिए $$a+b=1 \qquad (1)$$

और $$ab=-6 \qquad (2)$$

समीकरण (1) और (2) से a को विलुप्त करने पर

$$-b^2+b=-6$$

या $$b^2-b-6=0$$

या $$b=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm 5}{2},$$

अर्थात $b=3$ या $b=-2$

जब $b=-2$ है तब $a=3$ और जब $b=3$ है तब $a=-2$

अतः रेखा का अन्तःखण्ड रूप द्वारा अभीष्ट समीकरण हैं

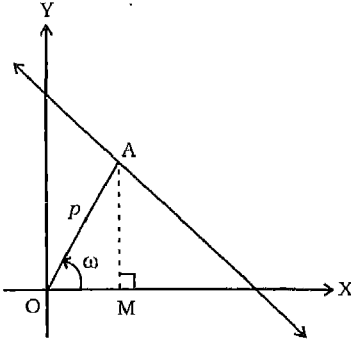
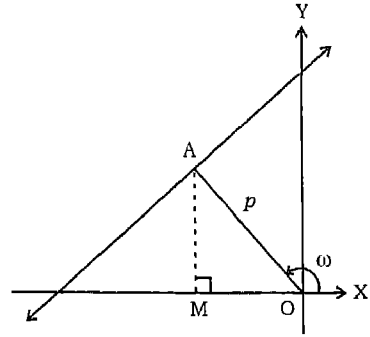
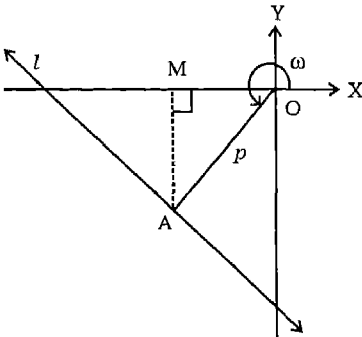
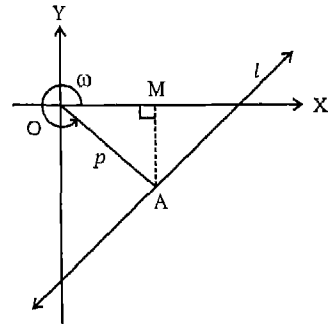
$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1 \quad \text{या} \quad \frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$$

अर्थात् $\quad 2x-3y-6=0 \quad$ या $\quad 3x-2y+6=0$

11.2.7 रेखा के समीकरण का अभिलम्ब रूप मान लीजिए कि l दी गयी रेखा है और OA, मूल बिन्दु से रेखा l पर लम्ब डाला गया है।

मान लीजिए $OA = p$ और $\angle XOA = \omega$

xy–तल में रेखा l की सभी सम्भव स्थितियां आकृति 11.11 [(i) से (iv)] में प्रदर्शित हैं।

प्रत्येक दशा में, x–अक्ष पर लम्ब AM खींचिए।

आकृति 11.11(i)

आकृति 11.11(ii)

आकृति 11.11(iii)

आकृति 11.11(iv)

हम पाते हैं कि $OM = p \cos \omega$ और $MA = p \sin \omega$

इस प्रकार बिन्दु A के निर्देशांक $(p \cos \omega, p \sin \omega)$ हैं।

साथ ही रेखा OA की प्रवणता $= \tan \omega$

इस प्रकार l, जो OA पर लम्ब है, की प्रवणता

$$m = \frac{-1}{\text{OA की प्रवणता}} = \frac{-1}{\tan \omega} = \frac{-\cos \omega}{\sin \omega}$$

हमें रेखा l की प्रवणता और उस पर एक बिन्दु $P(p \cos \omega, p \sin \omega)$ ज्ञात है

इसलिए 'बिन्दु–प्रवणता रूप' में l का समीकरण है :

$$y - p \sin \omega = -\frac{\cos \omega}{\sin \omega}(x - p \cos \omega)$$

या $$y \sin \omega - p \sin^2 \omega = -x \cos \omega + p \cos^2 \omega$$

या $$x \cos \omega + y \sin \omega = p (\sin^2 \omega + \cos^2 \omega)$$

या $$x \cos \omega + y \sin \omega = p$$

इसे रेखा के समीकरण का 'अभिलम्ब रूप' कहते हैं

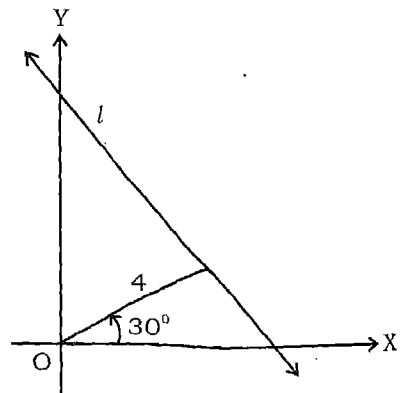
उदाहरण 10 उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिस पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई 4 इकाई तथा रेखा l पर मूल बिन्दु से डाला गया लम्ब रेखा खण्ड, x–अक्ष की धन–दिशा के साथ 30^0 का कोण बनाता है।

हल ज्ञात है कि $p = 4$ और $\omega = 30°$, इसलिए रेखा के समीकरण के अभिलम्ब रूप द्वारा, हम पाते हैं कि,

$$x \cos 30° + y \sin 30° = 4$$

या $$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 4$$

अर्थात $$\sqrt{3}x + y - 8 = 0,$$

जो कि अभीष्ट समीकरण है।

आकृति 11.12

प्रश्नावली 11.2

प्रश्न 1 से 9 में दिए गए प्रतिबन्धों को सतुंष्ट करने वाली रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए

1. बिन्दु $(-1,2)$ से होकर जाने वाली, जिसकी प्रवणता 4 है।

2. बिन्दु $(-4,3)$ से होकर जाने वाली, जिसकी प्रवणता $\frac{1}{2}$ है।

3. बिन्दु $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ से होकर जाने वाली, जिसकी प्रवणता $\frac{2}{3}$ है।

4. बिन्दु $(2,2)$ से होकर जाने वाली जो x–अक्ष पर 45° पर झुकी हुई है।

5. x–अक्ष को मूल बिन्दु से 3 इकाई बांयी ओर काटती है तथा उसकी प्रवणता -2 है।

6. y–अक्ष को मूल बिन्दु से 2 इकाई ऊपर की ओर काटती है और x–अक्ष की धनदिशा के साथ 30° का कोण बनाती है।

7. बिन्दुओं $(-1,1)$ और $(2,-4)$ से होकर जाती है।

8. बिन्दुओं $(0,-3)$ और $(5,0)$ से होकर जाती है।

9. बिन्दुओं $(-1,-2)$ और $(2, 1)$ से होकर जाती है।

10. $(0,2)$ से जाने वाली रेखाएं ज्ञात कीजिए जो x–अक्ष के साथ $\frac{\pi}{3}$ और $\frac{2\pi}{3}$ कोण बनाती हैं। इनके समांतर उन रेखाओं के समीकरण भी ज्ञात कीजिए जो y–अक्ष को मूल बिन्दु से 2 इकाई नीचे प्रतिच्छेदित करती हैं।

11. शीर्षो $(2,1)$, $(-2,3)$ और $(4,5)$ वाले त्रिभुज की भुजाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

12. बिन्दु $A(1,0)$ और $B(2,3)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड के लम्ब समद्विभाजक का समीकरण ज्ञात कीजिए।

13. बिन्दु $(-3,5)$ से होकर जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(2,5)$ और $(-3,6)$ से जाने वाली रेखा पर लम्ब हो।

14. y–अक्ष पर -5 अन्तःखण्ड काटने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी प्रवणता $\frac{1}{2}$ है।

15. बिन्दु $(2,2)$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात करें जिसका अक्षों पर कटे अन्तः खण्डों का योगफल 9 हो।

16. एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दु $(2,1)$, $(-5,7)$ और $(-5,-5)$ हैं। इसकी भुजाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

17. यदि अक्षों पर a तथा b अन्तःखण्ड काटने वाली रेखा पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई p है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिस पर मूल बिन्दु से खींचे गए लम्ब रेखाखण्ड की लम्बाई p तथा इस लम्ब द्वारा x–अक्ष के साथ बना कोण ω निम्नांकित प्रश्नों 18 से 21 में दिए गए हैं।

18. $p = 3;\ \omega = 45°$

19. $p = 5,\ \omega = 30°$

20. $p = 5,\ \omega = 135°$

21. $p = 1,\ \omega = 90°$

22. बिन्दु $(-2, 1)$ से होकर जाने वाली तथा x–अक्ष की धन–दिशा से $45°$ का कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण सममित रूप में ज्ञात कीजिए।

11.2.8 रेखा का व्यापक समीकरण

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0 \qquad (1)$$

के रूप में दिए गए समीकरण को x और y में एक व्यापक रैखिक समीकरण कहते हैं जहां A,B,C अचर हैं और A और B दोनों एक साथ शून्य नहीं हैं।

समीकरण (1) में प्रत्यक्षतः तीन स्वेच्छ अचर A, B और C हैं परन्तु वस्तुतः इसमें केवल दो स्वतन्त्र अचर $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}$ और $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}$ हैं जहां $\mathrm{C} \neq 0$। इसलिए समीकरण (1) निम्नांकित रूप में लिखा जा सकता हैं,

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}x + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}y + 1 = 0, \qquad \mathrm{C} \neq 0 \qquad (2)$$

आइए अब हम ज्ञात करें कि A, B और C के विभिन्न मानों के लिए समीकरण (1) के विभिन्न रूप क्या हैं?

(i) यदि $\mathrm{B} \neq 0$ और $\mathrm{A} = 0$ तब समीकरण (1) का रूप

$$\mathrm{B}\,y + \mathrm{C} = 0$$

या $$y = -\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}},$$ है

जो x–अक्ष के समान्तर एक रेखा निरूपित करता है।

(ii) यदि $A \neq 0$ और $B = 0$ तो समीकरण (1) का रूप होता है।

$Ax + C = 0$

या $x = -\frac{C}{A}$,

जो y–अक्ष के समान्तर एक रेखा निरूपित करता है।

(iii) यदि $A \neq 0$ और $B \neq 0$ तो समीकरण (1) का रूप

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \text{ है}$$

जो $y = mx + c$, के रूप का है। स्पष्टतः यह $-\frac{A}{B}$ प्रवणता वाली उस रेखा को निरूपित करता है जिसका y–अन्तःखण्ड $-\frac{C}{B}$ है।

अतः सभी स्थितियों में समीकरण (1) एक रेखा निरूपित करता है। इस प्रकार हमने निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध किया है।

प्रमेय 1 यदि A और B दोनों एक साथ शून्य न हों तो व्यापक रैखिक समीकरण $Ax + By + C = 0$, सदैव एक रेखा निरूपित करता है।

अब हम उपर्युक्त प्रमेय के विलोम को लेते हैं अर्थात हम देखते हैं कि विभिन्न रेखाओं को $Ax + By + C = 0$ समीकरण द्वारा निरूपित किया जा सकता है।

हम जानते हैं कि एक रेखा या तो y–अक्ष को काटती है या उसके समांतर होती हैं और या उसके संपाती होती है।

स्थिति (i) यदि रेखा y–अक्ष के संपाती है अथवा उसके समांतर है, तो इसका समीकरण $x = a$ (रेखा के y–अक्ष के संपाती होने की स्थिति में $a = 0$)। यह समीकरण $x - a = 0$, x और y में रैखिक समीकरण है, जिसमें y का गुणांक शून्य है, तथा x का गुणांक 1 है।

स्थिति (ii) यदि रेखा y–अक्ष को काटती है तब इसकी कोई प्रवणता और y–अन्तःखण्ड अवश्य होगा। इस रेखा के समीकरण

$y = mx + c$ को $mx - y + c = 0$ के रूप में लिख सकते हैं।

स्पष्टतः यह x और y में एक रैखिक समीकरण है।

इस प्रकार हमने निम्नांकित प्रमेय सिद्ध किया है।

प्रमेय 2 प्रत्येक सरल रेखा का $Ax + By + C = 0$ के रूप में एक समीकरण होता है, जहाँ A, B और C अचर हैं।

प्रमेय 1 और 2 को मिलाने पर निष्कर्ष यह निकलता है, कि सरल रेखा का व्यापक समीकरण है:

$$A x + B y + C = 0.$$

इस प्रकार दो प्रतिबन्धों के दिए होने पर हम एक रेखा का समीकरण अद्वितीयतः ज्ञात कर सकते हैं क्योंकि इसमें केवल दो स्वतन्त्र अचर होते हैं।

रेखा के व्यापक समीकरण का अभिलम्ब रूप में अन्तरण

रेखा का व्यापक समीकरण

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

और रेखा के समीकरण का अभिलम्ब रूप है

$$x \cos \omega + y \sin \omega - p = 0, \quad p > 0. \tag{2}$$

यदि हम मान लें कि समीकरण (1) और (2) एक ही रेखा को निरूपित करते हैं, तो इनके संगत गुणांक समानुपाती होंगे अर्थात्

$$\frac{A}{\cos \omega} = \frac{B}{\sin \omega} = -\frac{C}{p} \tag{3}$$

जिससे $\cos \omega = -\frac{Ap}{C}$ और $\sin \omega = -\frac{Bp}{C}$

प्राप्त होता है।

चूँकि $\cos^2 \omega + \sin^2 \omega = 1$, इसलिए

$$\frac{A^2 p^2}{C^2} + \frac{B^2 p^2}{C^2} = 1$$

या $$p^2 = \frac{C^2}{A^2 + B^2}$$

या $$p = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{4}$$

स्थिति (i) जब C धनात्मक है

चूँकि p लम्ब रेखा–खण्ड की लम्बाई है, अतः यह सदैव अऋणात्मक होगा इसलिए समीरकण (4) के दाहिनी ओर ऋणेत्तर चिह्न लेते हैं। अर्थात $p = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

इसलिए $\cos\omega = -\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ और $\sin\omega = -\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

अतः समीकरण (1) का अभिलम्ब रूप है

$$-\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,x - \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,y = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

स्थिति (ii) जब C ऋणात्मक है।

चूँकि p, सदैव ऋणेत्तर होगा, अतः समीकरण (4) के दाहिनी ओर ऋणात्मक चिह्न लेते हैं।

अर्थात $p = -\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

इसलिए $\cos\omega = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ और $\sin\omega = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

अतः समीकरण (1) का अभिलम्ब रूप

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,y = -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$ है।

टिप्पणीः समान्यतः व्यापक रैखिक समीरण $Ax + By + C = 0$ अभिलम्ब रूप में निम्नांकित क्रिया–पदों द्वारा लाया जा सकता है।

1. अचर पद को दाहिने पक्ष में ले जाइए

   अर्थात् $Ax + By = -C$

2. यदि दाहिना पक्ष ऋणात्मक है, तो समीकरण में प्रत्येक चिह्न परिवर्तित करके दाहिने पक्ष को धनात्मक बनाइए।

3. दोनों पक्षों में $\sqrt{(x \text{ का गुणांक})^2 + (y \text{ का गुणांक})^2}$, अर्थात् $\sqrt{A^2+B^2}$ से भाग दीजिए।

उदाहरण 11 निम्नांकित समीकरणों को अभिलम्ब रूप में लिखिए।

(i) $\sqrt{3}\,x + y - 8 = 0$

(ii) $3x - 4y + 10 = 0$

हल (i) दिए समीकरण के अनुसार,

$$\sqrt{3}\,x + y = 8$$

दोनों पक्षों में $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}$ अर्थात, 2 से भाग देने पर हम पाते हैं

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=4$$

जो दिए समीकरण का अभीष्ट अभिलम्ब रूप है।

(ii) दिए समीकरण से हम पाते हैं

$$3x-4y=-10$$

या $$-3x+4y=10$$

दोनो पक्षों में $\sqrt{(-3)^2+4^2}$ अर्थात, 5 से भाग देने पर हम पाते हैं

$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=2,$$

जो दिए समीकरण का अभीष्ट अभिलम्ब रूप है।

प्रश्नावली 11.3

निम्नांकित प्रत्येक समीकरण को प्रवणता–अन्तःखण्ड रूप में परिवर्तित कीजिए :

1. $3x+3y=5$

2. $7x+3y-6=0$

3. $2x-4y=5$

4. $6x+3y-5=0$

5. $x+7y=0$

6. $y=0$

निम्नांकित प्रत्येक समीकरण को अभिलम्ब रूप में परिवर्तित कीजिए, और रेखा पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए :

7. $x+y-2=0$

8. $4x+3y-9=0$

9. $x-4=0$

10. $y-2=0$

11.3 रेखाओं का प्रतिच्छेदन

हम जानते हैं कि एक तल में दो रेखाएं या तो समान्तर होती हैं या काटती हैं। यदि रेखाएं काटती हैं, तो प्रतिच्छेदन बिन्दु ज्ञात करना महत्वपूर्ण है। मान लीजिए

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \qquad (1)$$

और $$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \qquad (2)$$

आकृति 11.13

रेखाओं l_1 और l_2 के समीकरण हैं। यदि l_1 और l_2 परस्पर बिन्दु (x_1, y_1), पर काटती हैं तो यह बिन्दु दोनों समीकरण (1) और (2) को संतुष्ट करेगा।

$$A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 = 0 \qquad (3)$$

और $$A_2 x_1 + B_2 y_1 + C_2 = 0 \qquad (4)$$

(3) और (4) को हल करनें पर हम पाते हैं कि

$$\frac{x_1}{B_1C_2 - B_2C_1} = \frac{y_1}{A_2C_1 - A_1C_2} = \frac{1}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

इसलिए $$x_1 = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \quad \text{और} \quad y_1 = \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}$$

अतः सरल रेखाओं l_1 और l_2 के प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक हैं

$$\left(\frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}\right)$$

कार्यकारी नियम दो रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का निर्देशांक ज्ञात करने के लिए उनके समीकरणों को x और y के लिए हल कीजिए। इस प्रकार प्राप्त x तथा y के मान प्रतिच्छेद बिन्दु के क्रमशः भुज तथा कोटि होते हैं।

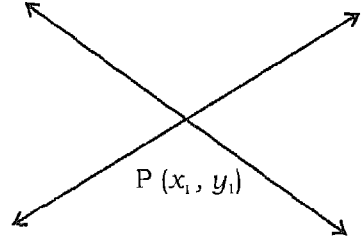
उदाहरण 12 एक त्रिभुज की भुजाओं के समीकरण $x - 2y + 9 = 0$, $3x + y - 22 = 0$ और $x + 5y + 2 = 0$ हैं। त्रिभुज के शीर्षों को ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए त्रिभुज की भुजाओं AB, BC और CA के समीकरण क्रमशः

$$x - 2y + 9 = 0 \qquad (1)$$

$$3x + y - 22 = 0 \qquad (2)$$

$$x + 5y + 2 = 0 \qquad (3)$$

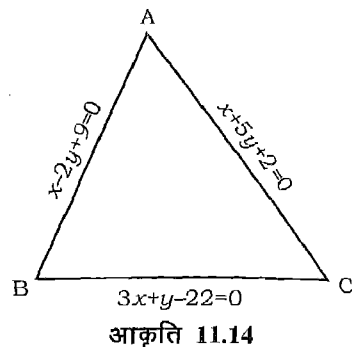
हैं।

समीकरणों (1) और (2) को हल करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{x}{44-9} = \frac{y}{27+22} = \frac{1}{1+6},$$

अर्थात $x = 5$ और $y = 7$

अतः रेखा AB और BC के उभयनिष्ठ बिन्दु B के निर्देशांक (5, 7) है।

इसी प्रकार समीकरणों (2) और (3) को हल करने पर रेखाओं BC और CA के उभयनिष्ठ बिन्दु C के निर्देशांक प्राप्त (8,–2) होते हैं और बिन्दु A के निर्देशांक (–7, 1) प्राप्त होते हैं।

आकृति 11.14

अतः त्रिभुज ABC के शीर्षों के निर्देशांक (5, 7) , (8, –2) और (–7, 1) हैं।

11.3.1 तीन सरल रेखाओं का संगमन प्रतिबन्ध तीन या अधिक रेखाएं संगामी कहलाती हैं, यदि और केवल यदि वे एक ही बिन्दु से होकर जाएं।

तीन रेखाओं

$$l_1: \quad A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \qquad (1)$$

$$l_2: \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \qquad (2)$$

और

$$l_3: \quad A_3 x + B_3 y + C_3 = 0 \qquad (3)$$

के संगामी होने का प्रतिबन्ध यह है कि l_1 और l_2 के प्रतिच्छेदन बिन्दु के निर्देशांक l_3 के समीकरण को भी संतुष्ट करते हों।

हम l_1 और l_2 के प्रतिच्छेदन बिन्दु के निर्देशांक

$$\left(\frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}\right)$$

प्राप्त कर चुके हैं।

रेखाओं l_1, l_2 और l_3 के संगामी होने के लिए यह निर्देशांक समीकरण (3) को संतुष्ट करने चाहिए अर्थात

$$A_3\left(\frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}\right) + B_3\left(\frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}\right) + C_3 = 0$$

या $A_3(B_1C_2 - B_2C_1) + B_3(A_2C_1 - C_2A_1) + C_3(A_1B_2 - A_2B_1) = 0$ (4)

विलोमतः, यदि प्रतिबन्ध (4) सत्य है तो बिन्दु $\left(\frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}\right)$,

जो रेखाओं l_1 और l_2, का प्रतिच्छेदन बिन्दु है जिसे सरल रेखा l_3 पर स्थित होना चाहिए।

इस प्रकार, यदि समीकरण (4) सत्य है तो रेखाएं l_1, l_2 और l_3 संगामी होती है।

अतः तीन रेखाएं l_1, l_2 और l_3 जिनके समीकरण कमशः (1), (2) और (3) हैं, संगामी होती है यदि और केवल यदि $A_3(B_1C_2 - B_2C_1) + B_3(C_1A_2 - C_2A_1) + C_3(A_1B_2 - A_2B_1) = 0$ हो।

तीन रेखाओं के सगंमन के लिए अन्य प्रतिबन्ध तीन रेखाएं, जिनके समीकरण (1), (2) और (3) द्वारा व्यक्त है संगामी होती हैं, यदि और केवल यदि तीन अचर λ, μ और ν (सभी शून्य नहीं) इस प्रकार हों कि

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) + \nu(A_3x + B_3y + C_3) = 0 \quad (5)$$

उपपति मान लीजिए कि रेखाओं l_1 और l_2 का प्रतिच्छेदन बिन्दु (x_1, y_1) है।

इसलिए $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 = 0$ (6)

और $A_2x_1 + B_2y_1 + C_2 = 0$ (7)

(x_1, y_1) को समीकरण (5) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$\lambda(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) + \mu(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) + \nu(A_3x_1 + B_3y_1 + C_3) = 0 \quad (8)$$

(6) और (7) को समीकरण (8) में प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$\nu(A_3x_1 + B_3y_1 + C_3) = 0.$$

इसलिए $\nu \neq 0$ के सभी मानों के लिए,

$$A_3x_1 + B_3y_1 + C_3 = 0.$$

इस प्रकार बिन्दु रेखा l_3 पर भी स्थित होगा। अतः रेखाएं l_1, l_2 और l_3 संगामी है।

उदाहरण 13 दिखाइए कि किसी त्रिभुज के शीर्षलम्ब संगामी होते हैं।

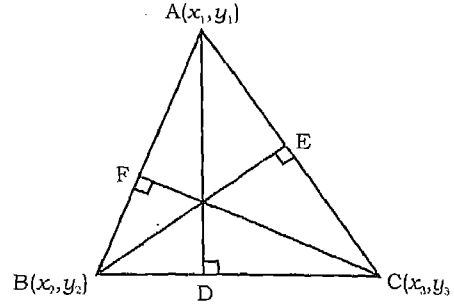
हल मान लीजिए की त्रिभुज के शीर्ष $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ और $C(x_3, y_3)$ हैं। मान लीजिए AD, BE और CF त्रिभुज के शीर्षलम्ब हैं अर्थात AD, BE और CF क्रमशः BC, AC और AB पर लम्ब हैं। अब

रेखा BC की प्रवणता $= \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$

रेखा AC की प्रवणता $= \dfrac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}$

और रेखा AB की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

आकृति 11.15

इसलिए

रेखा AD की प्रवणता $= -\dfrac{1}{\text{BC की प्रवणता}} = \dfrac{x_2 - x_3}{y_3 - y_2}$

रेखा BE की प्रवणता $= -\dfrac{1}{\text{AC की प्रवणता}} = \dfrac{x_3 - x_1}{y_1 - y_3}$

और रेखा CF की प्रवणता $= -\dfrac{1}{\text{AB की प्रवणता}} = \dfrac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1}$.

'बिन्दु–प्रवणता रूप' के प्रयोग से AD का समीकरण

$$y - y_1 = \frac{x_2 - x_3}{y_3 - y_2}(x - x_1),$$

अर्थात् $x(x_2 - x_3) + y(y_2 - y_3) - x_1(x_2 - x_3) - y_1(y_2 - y_3) = 0$ (1)

इसी प्रकार रेखाओं BE और CF के समीकरण हैं

$$x(x_3 - x_1) + y(y_3 - y_1) - x_2(x_3 - x_1) - y_2(y_3 - y_1) = 0 \quad (2)$$

और $x(x_1 - x_2) + y(y_1 - y_2) - x_3(x_1 - x_2) - y_3(y_1 - y_2) = 0$ (3)

समीकरणों (1), (2) और (3) को जोड़ने पर हम पातें हैं, कि

$$0.x + 0.y + 0 = 0$$

अतः हम तीन अचर $\lambda = \mu = \nu = 1$, ऐसे प्राप्त करते हैं, कि

$$\lambda\{x(x_2 - x_3) + y(y_2 - y_3) - x_1(x_2 - x_3) - y_1(y_2 - y_3)\} + \mu\{x(x_3 - x_1) + y(y_3 - y_1) - x_2(x_3 - x_1) - y_2(y_3 - y_1)\} + \nu\{x(x_1 - x_2) + y(y_1 - y_2) - x_3(x_1 - x_2) - y_3(y_1 - y_2)\} = 0.$$

अतः शीर्षलम्ब AD, BE और CF संगामी हैं।

उदाहरण 14 दिखाइए कि बिन्दुओं (7,2), (5,–2) और (–1,0) शीर्ष वाले त्रिभुज की भुजाओ के लम्ब समद्विभाजक संगामी होते हैं। इस त्रिभुज के परिकेन्द्र के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि बिन्दु (7,2), (5,–2) और (–1,0) क्रमशः A, B और C, प्रकट करते हैं।

मान लीजिए भुजाओं BC, AC और AD के मध्य बिन्दु क्रमशः D,E और F हैं। अब D के निर्देशांक (2,–1) हैं। रेखा

BC की प्रवणता $= \frac{-2-0}{5+1} = -\frac{1}{3}$

इसलिए BC पर लम्ब रेखा की प्रवणता = 3

इसलिए BC पर लम्ब तथा बिन्दु D से जाने वाली रेखा का समीकरण है

आकृति 11.16

$$y + 1 = 3\,(x - 2)$$

अर्थात $\qquad 3x - y - 7 = 0 \qquad\qquad (1)$

यह वास्तव में भुजा BC का लम्ब समद्विभाजक है।

इसी प्रकार E से AC पर लम्ब रेखा का समीकरण $y - 1 = -4\,(x - 3)$

अर्थात् $\qquad 4x + y - 13 = 0, \qquad\qquad (2)$

और भुजा AB के लम्ब समद्विभाजक का समीकरण

$x + 2y - 6 = 0$ है $\qquad\qquad (3)$

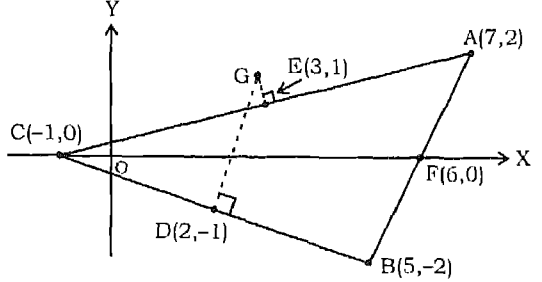
इस प्रकार समीकरण (1), (2) और (3) त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजकों को निरूपित क़रते हैं।

समीकरण (1) और (2) को हल करने पर, हमें

$$x = \frac{20}{7} \quad \text{और} \quad y = \frac{11}{7}$$

प्राप्त होता है।

समीकरण (3) में x और y के यह मान रखने पर, हम पातें हैं कि

$$\frac{20}{7} + \frac{22}{7} - 6 = 0$$

जो सत्य है। अतः त्रिभुज ABC के लम्ब समद्विभाजक संगामी है, और परिकेन्द्र के निर्देशांक $\left(\frac{20}{7}, \frac{11}{7}\right)$ हैं।

प्रश्नावली 11.4

प्रश्न 1 से 3 तक प्रत्येक में दिए समीकरणों द्वारा निरूपित रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिन्दु ज्ञात कीजिए :

1. $2x + 3y - 6 = 0, \quad 3x - 2y - 6 = 0$

2. $x = 0, \quad 2x - y + 3 = 0$

3. $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 0, \ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

सिद्ध कीजिए कि, प्रश्न 4 और 5 में दी गयी रेखाएं संगामी है। प्रत्येक दशा में संगमन बिन्दु भी ज्ञात कीजिए :

4. $5x - 3y = 1, \quad 2x + 3y = 23, \quad 42x + 21y = 257$

5. $2x + 3y - 4 = 0, \quad x - 5y + 7 = 0, \quad 6x - 17y + 24 = 0$

6. बिन्दुओं A, B और C के निर्देशांक क्रमशः (1 , 2), (–2 , 1) और (0 , 6) हैं। सत्यापित कीजिए कि त्रिभुज ABC की माध्यिकाएं संगामी है। त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

7. बिन्दु (–1,3) से रेखा $3x - 4y - 16 = 0$ पर डाले गए लम्ब का पाद ज्ञात कीजिए।

8. दो रेखाएं x–अक्ष को 4 और –4 दूरियों पर तथा y–अक्ष को 2 और 6, पर क्रमशः काटती है। इन रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

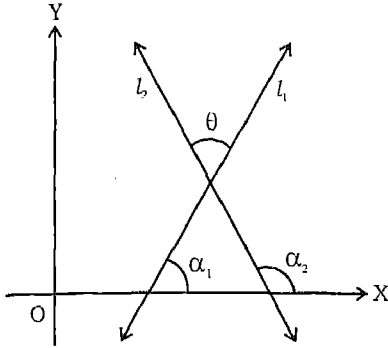
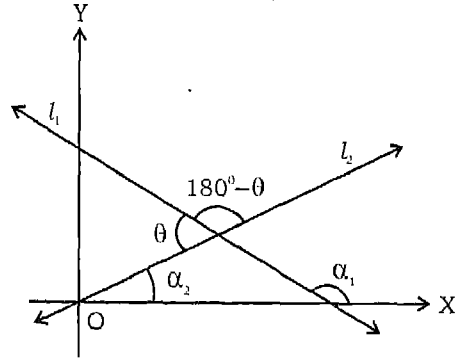
9. यदि रेखाएं जिनके समीकरण $y = m_1 x + a_1$, $y = m_2 x + a_2$ और $y = m_3 x + a_3$ हैं, एक बिन्दु पर मिलती है, तो सिद्ध कीजिए कि $m_1 (a_2 - a_3) + m_2 (a_3 - a_1) + m_3 (a_1 - a_2) = 0$.

10. उस त्रिभुज के लाम्बिक केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (–1,3), (2,–1) और (0,0) हैं।

11.4 दो रेखाओं के बीच का कोण

हम दो अलम्ब रेखाओं l_1 और l_2 पर विचार करते हैं जिनमें से कोई भी रेखा y–अक्ष के समान्तर नहीं है तथा इन रेखाओ के बीच के कोण के लिए इनकी प्रवणताओं के पदों में सूत्र निकालते हैं।

रेखाओं l_1 और l_2 के बीच का कोण या तो न्यूनकोण अथवा अधिक कोण होगा जैसा कि आकृति 11.17 (i) और (ii) में दर्शाया गया हैं।

मान लीजिए रेखाओं l_1 और l_2 की प्रवणताएं क्रमशः m_1 और m_2 हैं तथा इन रेखाओं द्वारा x–अक्ष की धन–दिशा के साथ बनाए गए कोण क्रमशः α_1 तथा α_2 हैं। अतः

आकृति 11.17 (i)

आकृति 11.17 (ii)

$m_1 = \tan \alpha_1$ और $m_2 = \tan \alpha_2$.

अब आकृति 11.17 (i) में हम देखते हैं कि

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \theta$$

इस प्रकार $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$ और $\tan \theta = \tan (\alpha_2 - \alpha_1)$,

या $$\tan \theta = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2}$$

इस प्रकार $$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}, \quad \theta \neq 90°.$$

आकृति 11.17 (ii), में, हम देखते हैं, कि α_1 त्रिभुज का बहिष्कोण है जिसके सम्मुख अन्तः कोण $(180° - \theta)$ और α_2 हैं। इसलिए $\alpha_1 = \alpha_2 + (180° - \theta)$

और $$\tan \theta = \tan [180° + (\alpha_2 - \alpha_1)] = \tan (\alpha_2 - \alpha_1),$$

या $$\tan \theta = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

इस प्रकार हमने निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध किया हैं :

प्रमेय 3 यदि दो रेखाओ l_1 और l_2 जिनकी प्रवणताएं कमशः m_1 और m_2, हैं के बीच का कोण θ हो, तो $$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

टिप्पणी संख्यात्मक प्रश्नों में कभी कभी $\tan\theta$ ऋणात्मक मिलता है। इसका अर्थ यह है कि दोनों रेखाओं के बीच के न्यूनकोण θ के स्थान पर उसका संपूरक मिल गया है। यह भी रेखाओं के बीच का कोण होता है।

उदाहरण 15 दो रेखाओं के बीच का कोण $\frac{\pi}{4}$ और उन रेखाओं में से एक का प्रवणता $\frac{1}{2}$ है तो दूसरी रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल हमें ज्ञात है कि दो रेखाओं के बीच का कोण θ निम्नाकिंत सूत्र द्वारा व्यक्त होता है

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}. \qquad (1)$$

ज्ञात है कि $m_1 = \frac{1}{2}$ और $\theta = \frac{\pi}{4}$.

इन मानों को (1), में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं

$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{m_2 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} m_2}$$

इस प्रकार $\frac{2m_2 - 1}{2 + m_2} = 1$,

जिससे $m_2 = 3$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 11.5

1. रेखाओं $y - \sqrt{3}x - 5 = 0$ और $\sqrt{3}y - x + 6 = 0$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।
2. उन दो रेखाओं के बीच के कोण की स्पज्या (tangent) ज्ञात कीजिए जिनके अक्षों पर अन्तः खण्ड क्रमशः $p, -q$ और $q, -p$ हैं।
3. वह त्रिभुज जिसके शीर्ष $(5, -6)$, $(1, 2)$ और $(-7, -2)$ हैं तो ज्ञात कीजिए कि यह त्रिभुज समकोणिक, न्यूनकोणिक अथवा अधिककोणिक में से किस प्रकार का है?
4. बिन्दु $(2, 3)$ से होकर जाने वाली दो रेखाओं के बीच का कोण $45°$ है। यदि उन रेखाओं में किसी एक की प्रवणता 2 है, तो दूसरी रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।
5. बिन्दुओं $(4, 3)$ और $(-6, 0)$ से जाने वाली रेखा, अन्य रेखा $5x + y = 0$ को काटती है। दोनों रेखाओं के बीच बने कोणों को ज्ञात कीजिए।

6. रेखा $7x - 9y - 19 = 0$, बिन्दुओं $(x, 3)$ और $(4, 1)$ से होकर जाने वाली रेखा पर लम्ब है। x का मान ज्ञात कीजिए।

7. बिन्दु $(4, 5)$ से होकर जाने वाली उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखाओं $5x - 12y + 6 = 0$ और $3x = 4y + 7$ से समान कोण बनाती हैं।

8. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(2, -1)$, $(0, 2)$, $(3, 3)$ और $(5, 0)$ एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हैं। इसके विकर्णों के बीच कोण भी ज्ञात करें।

9. तीन रेखाओं के समीकरण $15x - 8y + 1 = 0$, $12x + 5y - 3 = 0$ और $21x - y - 2 = 0$ दिए गए हैं। दिखाइए कि तीसरी रेखा अन्य दो रेखाओं के बीच के कोण को समद्विभाजित करती है।

10. सिद्ध कीजिए कि चार रेखाओं $\sqrt{3}x + y = 0$, $\sqrt{3}y + x = 0$, $\sqrt{3}x + y = 1$ और $\sqrt{3}y + x = 1$ से बने समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब हैं।

11.5 एक बिन्दु की एक रेखा से दूरी

एक रेखा से एक बिन्दु की लाम्बिक दूरी ज्ञात की जा सकती है, जब रेखा का समीकरण और बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात हों।

स्थिति 1 इस उद्देश्य के लिए सर्वप्रथम हम सूत्र व्युत्पन्न करते हैं, जब रेखा का समीकरण अभिलम्ब रूप में ज्ञात हो।

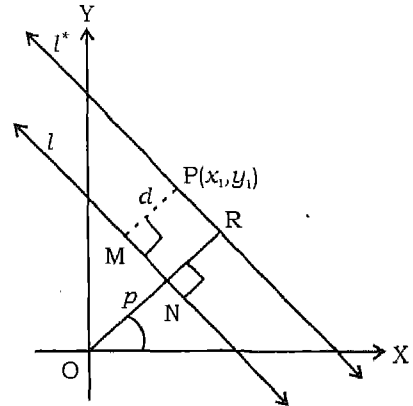
मान लीजिए, कि रेखा l का समीकरण अभिलम्ब रूप में

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p \text{ है,}$$

जहां α, मूल–बिन्दु से रेखा l पर डाले गए लम्ब द्वारा x–अक्ष की धन दिशा के साथ कोण, तथा p इस लम्ब की लम्बाई है। मान लीजिए $P(x_1, y_1)$ दिया गया बिन्दु है जो रेखा l पर नहीं है। मान लीजिए कि बिन्दु से रेखा l पर डाला गया लम्ब PM है और PM $= d$. बिन्दु P को रेखा l से मूल बिन्दु O के विपरीत ओर स्थित मान लिया गया है। बिन्दु P से रेखा l के समान्तर एक रेखा l^* खींचिए। मान लीजिए कि रेखा l पर ON लम्ब है, जो l^* से बिन्दु R पर मिलता है। स्पष्टत:

आकृति 11.18

$$\text{ON} = p \text{ और } \angle \text{XON} = \alpha.$$

$$\text{OR} = \text{ON} + \text{NR} = p + \text{MP}.$$

इसलिए, मूल बिन्दु से l^* पर लम्ब की लम्बाई

$$OR = p + d$$

और OR द्वारा x–अक्ष की धन–दिशा के साथ बना कोण α है।

इसलिए l^* का अभिलम्ब रूप मे समीकरण

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p + d$$

चूंकि रेखा l^* बिन्दु P से होकर जाती है, अतः बिन्दु P के निर्देशांक (x_1, y_1) रेखा l^* के समीकरण को संतुष्ट करेगा। अर्थात

$$x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha = p + d,$$

या $$d = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p$$

एक रेखा–खण्ड की लम्बाई सदैव अऋणात्मक होती है, इसलिए हम दाहिने पक्ष का निरपेक्ष मान लेते हैं।

अतः

$$d = |x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p|.$$

इस प्रकार लम्ब की लम्बाई व्यंजक $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p$ में बिन्दु P के निर्देशांकों को प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त फल का निरपेक्ष मान है।

स्थिति 2 जब रेखा का समीकरण व्यापक रूप में दिया है।

मान लीजिए कि रेखा का समीकरण

$$A x + B y + C = 0 \qquad (2)$$

उपर्युक्त व्यापक समीकरण को अभिलम्ब रूप मे परिणित करने पर, हम पाते हैं

$$\pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} x \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} y = \mp \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

जहां + या – चिन्ह मे से वह चिन्ह लिया जाता है जिससे दाहिना पक्ष धनात्मक हो।

(*a*) जब $C < 0$ है।

इस स्थिति मे दी गयी रेखा l का अभिलम्ब रूप

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} y = -\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

अब स्थिति (1) के परिणाम के अनुसार $P(x_1, y_1)$ से रेखा (2) पर डाले गए लम्ब–रेखा खण्ड

की लम्बाई

$$d = \left| \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} x_1 + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} y_1 + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \right|,$$

अर्थात $\quad d = \left| \dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2+B^2}} \right|$ है।

(*b*) जब $C > 0$ है

इस स्थिति में समीकरण (2) का अभिलम्ब रूप

$$-\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} x - \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} y = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

पुनः स्थिति (1) के परिणाम के अनुसार दूरी

$$d = \left| \frac{-Ax_1 - By_1 - C}{\sqrt{A^2+B^2}} \right|,$$

या $\quad d = \left| \dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2+B^2}} \right|$

इस प्रकार बिन्दु $P(x_1, y_1)$ की रेखा $Ax + By + C = 0$ से दूरी

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2+B^2}} \right|$$

उदाहरण 16 बिन्दु $(3, -5)$ की रेखा $4y = 3x - 26$ से दूरी ज्ञात कीजिए।

हल दिए समीकरण को निम्नांकित रूप मे लिख सकते हैं

$$3x - 4y - 26 = 0$$

इसलिए अभीष्ट दूरी

$$d = \frac{|3(3) - 4(-5) - 26|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

या $$d = \frac{|9+20-26|}{5} = \frac{3}{5}$$

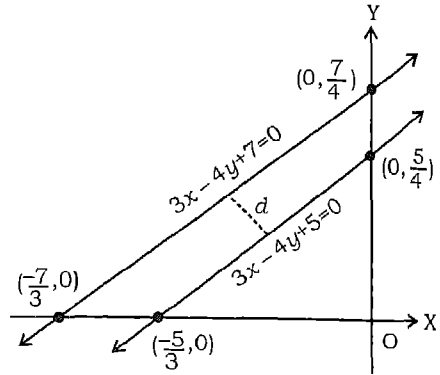
उदाहरण 17 समान्तर रेखाओं $3x - 4y + 5 = 0$ और $3x - 4y + 7 = 0$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल अभीष्ट दूरी दोनों रेखाओं में से किसी एक रेखा के विशिष्ट बिन्दु से दूसरी रेखा की दूरी को परिकलित करके प्राप्त की जा सकती है।

मान लीजिए कि विशिष्ट बिन्दु P रेखा $3x - 4y + 5 = 0$ पर वह बिन्दु है, जहां यह x–अक्ष से मिलती है।

अतः बिन्दु P के निर्देशांक $(-\frac{5}{3}, 0)$ हैं।

अब बिन्दु P की रेखा $3x - 4y + 7 = 0$ से लाम्बिक दूरी

$$d = \frac{\left|3\left(-\frac{5}{3}\right) - 4(0) + 7\right|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|-5+7|}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$$

आकृति 11.19

उदाहरण 18 x–अक्ष पर स्थित वह कौन से बिन्दु हैं जिनकी रेखा $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ से लाम्बिक दूरी 4 इकाई है।

हल मान लीजिए कि x–अक्ष पर स्थित अभीष्ट बिन्दु $P(x_1, 0)$ है।

रेखा के समीकरण को निम्नलिखित रूप में भी लिख सकते हैं।

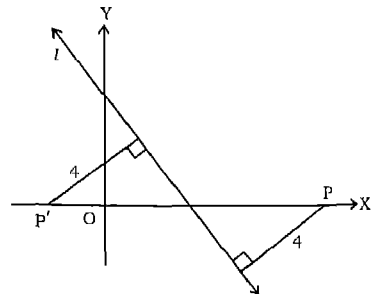
$$4x + 3y - 12 = 0 \quad (1)$$

बिन्दु P की रेखा (1) से लाम्बिक दूरी

$$= \frac{|4x_1 + 3(0) - 12|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|4x_1 - 12|}{5}$$

परन्तु $d = 4$ ज्ञात है

इसलिए $|4x_1 - 12| = 20,$

अर्थात $4x_1 - 12 = 20$ या $4x_1 - 12 = -20$

आकृति 11.20

अर्थात $x_1 = 8$ या $x_1 = -2$

इस प्रकार अभीष्ट बिन्दु (8, 0) और (–2, 0) हैं।

प्रश्नावली 11.6

निम्नांकित प्रश्न 1 से 4 तक प्रत्येक में रेखा l से बिन्दु P की दूरी ज्ञात कीजिए :

1. $l: 3x + 4y - 5 = 0$; P: $(-3, 4)$

2. $l: 12x - 5y - 7 = 0$; P: $(3, -1)$

3. $l: 12(x + 6) = 5(y - 2)$; P: $(-3, -4)$

4. $l: \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 1$; P : (b, a)

5. एक त्रिभुज जिसके शीर्ष A(2, 3), B(4, –1) और C(–1, 2) हैं, में शीर्ष A से खींचे गए शीर्षलम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

6. एक त्रिभुज जिसके शीर्ष A(–2, 1), B(6, –2) और C (4, 3) हैं, तो शीर्ष A से खींचे गए शीर्षलम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

निम्नांकित प्रश्न 7 से 9 तक के प्रश्नों में से प्रत्येक में दी गयी समान्तर रेखा–युग्म के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए :

7. $4x - 3y - 9 = 0$ और $4x - 3y - 24 = 0$

8. $15x + 8y - 34 = 0$ और $15x + 8y + 31 = 0$

9. $y = mx + c$ और $y = mx + d$

10. दो बिन्दुओं $(\cos\theta, \sin\theta)$ और $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ को मिलाने वाली रेखा की मूल–बिन्दु से दूरी ज्ञात कीजिए।

11. y–अक्ष पर स्थित उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए, जिनकी रेखा $4x - 3y - 12 = 0$ से दूरी 3 इकाई है।

11.6 दो रेखाओं के बीच के कोणों के अर्द्धकों के समीकरण

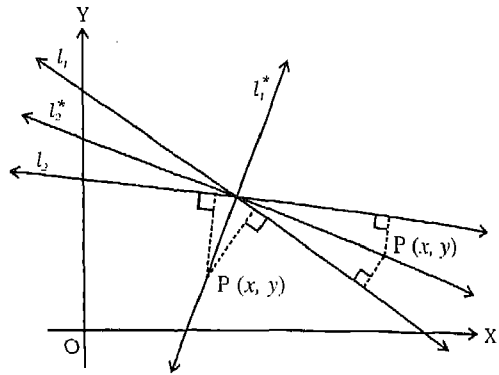
यदि दो प्रतिच्छेद करने वाली रेखाओं l_1 और l_2 का युग्म दिया हो, तो दो अन्य प्रतिच्छेद करने वाली रेखाएं l_1^* तथा l_2^* का युग्म जिनमें से एक दी गई रेखाओं के बीच के न्यूनकोण को समद्विभाजित करता है तथा दूसरा, रेखाओं के बीच अधिक कोण को समद्विभाजित करता है। इन नयी रेखाओं l^*_1 और l^*_2 को दी गयी रेखाओं l_1 और l_2 के बीच के कोणों के अर्धक कहते हैं। इन रेखाओं का उभयनिष्ट गुण यह है, कि ये दोनो दी गयी रेखाओं से समदूरस्थ होती हैं। इस

प्रकार एक रेखा जो दो रेखाओं l_1 और l_2 के बीच के कोण को समद्विभाजित करती है, ऐसे बिन्दुओं का बिन्दुपथ है, जो दी गई रेखाओं से समदूरस्थ होती है।

मान लीजिए कि दो दी गई रेखाएं

$$l_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

और $$l_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

हैं।

आकृति 11.21

मान लीजिए P(x, y), l^*_1 या l^*_2 किसी एक समद्विभाजक पर कोई बिन्दु है। अब

$$\left|\frac{A_1 x+B_1 y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}\right| = \left|\frac{A_2 x+B_2 y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\right|$$

या $$\frac{A_1 x+B_1 y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \pm \frac{A_2 x+B_2 y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \qquad (1)$$

जो अर्धकों l^*_1 और l^*_2 के समीकरण हैं।

उदाहरण 19 उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिये, जो रेखाओं $3x + 4y + 13 = 0$ और $12x - 5y + 32 = 0$ के बीच के कोणो को समद्विभाजित करती हैं।

हल दी गयी रेखाओं के मध्यस्थ कोणों के अर्धकों के समीकरण

$$\frac{3x+4y+13}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm\frac{12x-5y+32}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}$$

हैं, अर्थात $\frac{3x+4y+13}{5} = \frac{12x-5y+32}{13}$ और $\frac{3x+4y+13}{5} = -\frac{12x-5y+32}{13}$

इस प्रकार सरल करने पर हम पाते हैं कि $21x - 77y - 9 = 0$ और $99x + 27y + 329 = 0$ दी गई रेखाओं के मध्यस्थ कोण के समद्विभाजकों के समीकरण हैं।

उदाहरण 20 बिन्दु (0,0) से होकर जाने वाली तथा 1 और 2 प्रवणता रखने वाली रेखाओं के मध्यस्थ कोणों के समद्विभाजकों के समीकरण ज्ञात कीजिये।

हल मान लीजिए कि (0, 0) से होकर जाने वाली और 1 तथा 2 प्रवणता वाली रेखाएं क्रमशः l_1 और l_2 हैं।

अतः l_1 और l_2 के क्रमशः समीकरण हैं

$$l_1 : \; y = x \qquad \text{अर्थात} \qquad x - y = 0$$

और $$l_2 : \; y = 2x \qquad \text{अर्थात} \qquad 2x - y = 0$$

अब, इन रेखाओं के मध्यस्थ कोणों के समद्विभाजकों के समीकरण

$$\frac{x-y}{\sqrt{1^2+1^2}} = \pm \frac{2x-y}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

आकृति 11.22

या $$\frac{x-y}{\sqrt{2}} = \pm \frac{2x-y}{\sqrt{5}}$$

अर्थात $$\sqrt{5}x - \sqrt{5}y = 2\sqrt{2}x - \sqrt{2}y \text{ और } \sqrt{5}x - \sqrt{5}y = -2\sqrt{2}x + \sqrt{2}y$$

इस प्रकार अर्द्धकों के अभीष्ट समीकरण हैं

$$(2\sqrt{2} - \sqrt{5})\, x + (\sqrt{5} - \sqrt{2})\, y = 0$$

और $$(2\sqrt{2} + \sqrt{5})x - (\sqrt{5} + \sqrt{2})\, y = 0 \cdot$$

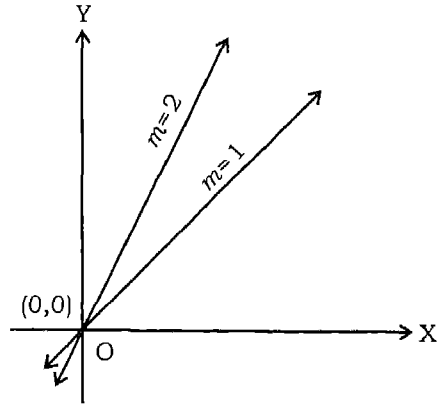
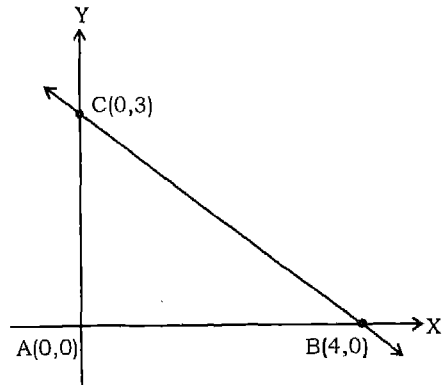
उदाहरण 21 उस त्रिभुज के अन्तः कोणों के समद्विभाजकों के समीकरण ज्ञात कीजिये, जिनके शीर्ष A (0 , 0), B(4 , 0) और C(0 , 3) हैं। यह भी दर्शाइए कि ये समद्विभाजक संगामी हैं।

हल भुजाओं AB, BC और CA, के समीकरण क्रमशः हैं

$$y = 0$$

$$3x + 4y - 12 = 0 \text{ और } x = 0,$$

अर्थात $$y = 0, -3x - 4y + 12 = 0 \text{ और } x = 0.$$

अब त्रिभुज ABC के कोणों ABC, BCA और CAB के अन्तः अर्द्धकों के समीकरण क्रमशः हैं

आकृति 11.23

$$\frac{y}{\sqrt{1}} = \frac{-3x-4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}} \text{ अर्थात } x + 3y - 4 = 0. \qquad (1)$$

$$\frac{-3x-4y+12}{\sqrt{25}} = \frac{x}{\sqrt{1}} \text{ अर्थात } 2x + y - 3 = 0. \qquad (2)$$

और $$\frac{x}{\sqrt{1}} = \frac{y}{\sqrt{1}} \text{ अर्थात } x - y = 0. \qquad (3)$$

इस प्रकार त्रिभुज ABC के अन्तःकोणों के समद्विभाजकों के समीकरण (1), (2) और (3) हैं।

अब समीकरणों (1) और (2) को हल करने पर हम पाते हैं कि अन्तःकोण ABC और BCA के अन्तः समद्विभाजकों के प्रतिच्छेदन–बिन्दु के निर्देशांक (1,1) हैं।

बिन्दु (1,1) को समीकरण (3) मे प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं

$$1 - 1 = 0,$$

जो सत्य है। इसलिए बिन्दु (1,1) तीसरे समद्विभाजक पर भी स्थित हैं।

अतः त्रिभुज ABC के कोणों के समद्विभाजक संगामी हैं, और संगमन बिन्दु (1,1) है।

प्रश्नावली 11.7

प्रश्न 1से 5 तक में दिए गए प्रत्येक रेखा–युग्म के मध्यस्थ कोणों के समद्विभाजकों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

1. $x + 2y + 3 = 0$ और $2x + y - 2 = 0.$

2. $3x - 4y + 12 = 0$ और $4x + 3y + 2 = 0.$

3. $3x + 4y + 13 = 0$ और $12x - 5y + 32 = 0.$

4. $x + y\sqrt{3} = 6 + 2\sqrt{3}$ और $x - y\sqrt{3} = 6 - 2\sqrt{3}.$

5. $4x + 3y - 5 = 0$ और $5x + 12y - 41 = 0.$

6. सिद्ध कीजिए कि दो परस्पर काटती हुई रेखाओं के मध्यस्थ कोणों के समद्विभाजक परस्पर लम्ब होते हैं।

प्रश्नों 7 और 8 प्रत्येक में त्रिभुज, के अन्तःकोणों के समद्विगाजकों के समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी भुजाओं के समीकरण दिए गए हैं।

7. $3x + 5y = 15,\ x + y = 4$ और $2x + y = 6.$

8. $4x - 3y + 12 = 0,\ 12x - 5y = 3$ और $3x + 4y = 6.$

9. रेखाओं

$y-b=\frac{2m}{1-m^2}(x-b)$ और $y-b=\frac{-2m}{1-m^2}(x+b)$ के मध्यस्थ कोणों के समद्विभाजकों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

10. उन रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $4x+3y+5=0$ पर बिन्दु $(2, 3)$ से डाले गये लम्ब के पाद से गुजरती हो तथा दी गई रेखा और लम्ब के बीच के कोण को समद्विभाजित करती हों।

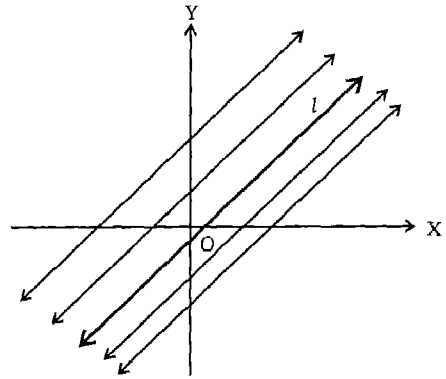
11.7 रेखा–कुल

11.7.1 किसी दी गयी रेखा के समांतर रेखाओं के समीकरण मान लीजिए कि दी गयी रेखा l का समीकरण

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

यदि $B \neq 0$, तो समीकरण (1) को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है।

$$y = -\frac{A}{B}x + (-\frac{C}{B}),$$

यह प्रवणता–अन्तःखण्ड रूप में हैं। इस रेखा की प्रवणता $-\frac{A}{B}$ है।

आकृति 11.24

इसलिए इस रेखा के समान्तर अन्य रेखाओं की प्रवणता भी $-\frac{A}{B}$ है।

अतः प्रवणता–अन्तःखण्ड रूप की सहायता से दी गयी रेखा l के समान्तर रेखाओं का समीकरण

$y = -\frac{A}{B}x + b$, जहाँ b एक स्वेच्छ अचर है।

अर्थात $\quad Ax + By - bB = 0$

अर्थात $\quad Ax + By + k = 0$, जहां $k = -bB$.

$B = 0$, की स्थिति में रेखा l का समीकरण निम्न रूप में परिवर्तित हो जायेगा

$$Ax + C = 0,$$

अर्थात $x = -\frac{C}{A}$, यदि $A \neq 0$

परन्तु यह y–अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण है। अतः y–अक्ष के समान्तर किसी रेखा का समीकरण x = अचर है।

जिसे निम्नांकित रूप में व्यक्त कर सकते हैं

$Ax + By + k = 0$, (यहां $B = 0$),

जहां k एक स्वेच्छ अचर है।

$A = 0$ होने की स्थिति में C भी शून्य होगा अतः यहां विचार करने के लिए कुछ नहीं हैं।

अतः सभी स्थितियों में हम पाते हैं कि दी गयी रेखा (1) के समान्तर रेखा का समीकरण $Ax + By + k = 0$ है। जहां k एक स्वेच्छ अचर है।

टिप्पणी ध्यान दें कि समीकरण $A\,x + B\,y + k = 0$ सरल रेखाओं के उस सम्मुच्चय को निरूपित करता है, जो दी गयी रेखा $A\,x + B\,y + C = 0$ के समान्तर हैं। k के विभिन्न मान समुच्चय के विभिन्न सदस्यों को निरूपित करते हैं। इस समुच्चय के किसी विशिष्ठ सदस्य को प्राप्त करने के लिए हमें उस रेखा के सम्बन्ध में अन्य प्रतिबन्ध ज्ञात होना चाहिए।

समीकरण $A\,x + B\,y + k = 0$, k के विभिन्न मानों के संगत दी गयी रेखा l के समान्तर विभिन्न रेखाओं को निरूपित करता है। इसलिए इसे समान्तर रेखाओं के कुल का समीकरण कहते हैं।

उदाहरण 22 $(-2\,,3)$ से जाने वाली तथा रेखा $3\,x\ - 4\,y + 2 = 0$ के समान्तर रेखा का समीकरण ज्ञात करें।

हल दी गयी रेखा $3\,x - 4\,y + 2 = 0$ के समान्तर रेखा का समीकरण

$$3\,x - 4\,y + k = 0 \qquad (1)$$

यह रेखा बिन्दु $(-2\,,3\,)$ से होकर जाती है, इसलिए

$$3\,(-2) - 4\,(\,3\,) + k = 0 \text{ अर्थात् } k = 18$$

k के इस मान को समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम अभीष्ट समीकरण निम्नांकित रूप में पाते हैं,

$$3\,x - 4\,y + 18 = 0.$$

11.7.2 एक दी गयी रेखा l पर लम्ब रेखा का समीकरण मान लीजिए कि दी गयी रेखा l का समीकरण $A\,x + B\,y + C = 0$ है।

(i) यदि $B = 0$, तब रेखा l के समीकरण से हमें प्राप्त होता है

$$Ax + C = 0 \quad \text{अर्थात्} \quad x = -\frac{C}{A},$$

जो y–अक्ष के समांतर एक रेखा का समीकरण होता है।

कोई भी रेखा जो l पर लम्ब हो वह x–अक्ष के समान्तर होगी जिसका समीकरण

$$y = \text{अचर है।} \qquad (1)$$

आकृति 11.25

इसी प्रकार यदि $A = 0$, रेखा l का घटित समीकरण $By + C = 0$ है, जो कि x–अक्ष के समान्तर रेखा को निरूपित करता है। अतः रेखा l पर लम्ब अन्य रेखा y–अक्ष के समान्तर होगी जिसका समीकरण निम्न रूप में होगा :

$$x = \text{अचर} \qquad (2)$$

मान लीजिए $A \neq 0$ और $B \neq 0$.

तब रेखा l की प्रवणता $= -\frac{A}{B}$

इसलिए रेखा l पर लम्ब रेखा की प्रवणता $= \frac{B}{A}$.

अतः प्रवणता–अन्तःखण्ड रूप में रेखा l पर लम्ब किसी अन्य रेखा का समीकरण

$$y = \frac{B}{A}x + b\text{; जहां } b \text{ एक स्वेच्छ अचर है।}$$

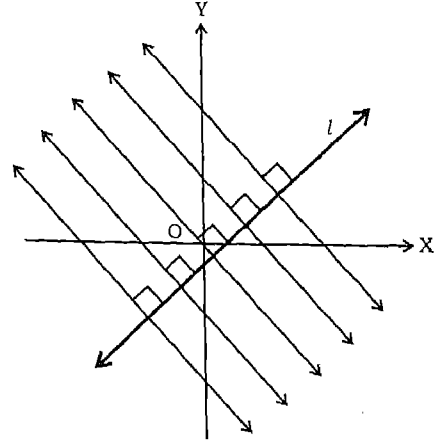
अर्थात $\quad Bx - Ay + bA = 0$

अर्थात $\quad Bx - Ay + k = 0$, जहां $k = bA$.

इस प्रकार दी गयी रेखा $Ax + By + C = 0$ पर लम्ब रेखा का समीकरण

$$Bx - Ay + k = 0. \qquad (3)$$

जहां k एक स्वेच्छ अचर है।

हम देखते हैं कि समीकरण (3) सभी स्थितियों में रेखा l पर लम्ब रेखा को निरूपित करता है, चूंकि जब $B = 0$, तब समीकरण (3) समीकरण (1) के रूप में परिवर्तित हो जाता है तथा जब

$A = 0$, तब समीकरण (3) समीकरण (2) के रूप में परिवर्तित हो जाता है।

ध्यान दें कि समीकरण $B\,x - A\,y + k = 0$ सरल रेखाओं के एक कुल को निरूपित करता है, जो रेखा $Ax + By + C = 0$ पर लम्ब है। इस कुल के विशिष्ट सदस्य को प्राप्त करने के लिए हमें उनके सम्बध में एक और अन्य प्रतिबन्ध ज्ञात होना चाहिए।

टिप्पणी दी गयी रेखा पर लम्ब रेखाओं के कुल का समीकरण लिखने में हम x और y के गुणांको को परिवर्तित करके किसी एक का चिह्न परिवर्तित करते हैं तथा अचर पद को k द्वारा विस्थापित करते हैं।

उदाहरण 23 दी गयी रेखा $x - 2y + 3 = 0$ पर लम्ब रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका x–अक्ष पर अन्तःखण्ड 3 है।

हल दी गयी रेखा पर लम्ब रेखा का समीकरण है :

$$2x + y + k = 0, \tag{1}$$

जहां k एक अचर है जिसे ज्ञात करना है।

इसका x–अक्ष पर अन्तःखण्ड ज्ञात करने के लिए $y = 0$ रखते हैं। इस प्रकार $x = -\frac{k}{2}$.

अब ज्ञात है, कि $-\frac{k}{2} = 3$ अर्थात $k = -6$.

समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$2x + y - 6 = 0,$$

जो अभीष्ट समीकरण है।

11.7.3 दो रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाने वाली रेखाओं के कुल का समीकरण मान लीजिए दो प्रतिच्छेदन करने वाली रेखाओं l_1 और l_2 के समीकरण

$$A_1x + B_1\,y + C_1 = 0 \tag{1}$$

और $$A_2x + B_2\,y + C_2 = 0 \text{ हैं।} \tag{2}$$

समीकरणों (1) और (2) से हम समीकरण

$$A_1x + B_1y + C_1 + k\,(A_2x + B_2y + C_2) = 0. \tag{3}$$

बनाते हैं, जहां k एक स्वेच्छ अचर है। k के किसी मान के संगत समीकरण (3), x और y में रैखिक है। अतः यह रेखाओं के कुल को निरूपित करता है। इसके साथ ही साथ x और y के वे मान जो समीकरणों (1) और (2) को साथ–साथ संतुष्ट करते हों, वे समीकरण (3), को भी

संतुष्ट करते हैं, k का मान चाहे जो कुछ भी हो। इस प्रकार समीरकण (3) द्वारा निरूपित कुल की प्रत्येक रेखा दी गयी दोनों रेखाओं l_1 और l_2 के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाने वाली रेखाओं के कुल को निरूपित करती है। k के किसी विशिष्ट मान के संगत इस कुल के विशिष्ट सदस्य को प्राप्त किया जा सकता है। k के इस मान को अन्य दिए प्रतिबन्ध की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 24 y–अक्ष के समान्तर उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $x - 7y + 5 = 0$ और $3x + y - 7 = 0$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाती है।

हल दी गयी रेखाओं के प्रतिच्छेदन–बिन्दु से होकर जाने वाली किसी रेखा के समीकरण निम्नांकित रूप में होता है

$$x - 7y + 5 + k(3x + y - 7) = 0,$$

अर्थात $$(1 + 3k)x + (k - 7)y + 5 - 7k = 0.$$

इस रेखा को y–अक्ष के समान्तर होने के लिए प्रतिबन्ध यह है कि इसमें y का गुणांक $= 0$, अर्थात $k - 7 = 0$ या $k = 7$

k के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर,

$$22x - 44 = 0 \quad \text{अर्थात} \quad x - 2 = 0,$$

जो अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 25 रेखाओं $3x + 4y = 7$ और $x - y + 2 = 0$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाने वाली, उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी प्रवणता 5 है।

हल दी गयी रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाने वाली रेखाओं के कुल का समीकरण है,

$$3x + 4y - 7 + k(x - y + 2) = 0$$

या $$(3 + k)x + (4 - k)y + 2k - 7 = 0.$$

इस कुल के प्रत्येक सदस्य की प्रवणता

$$m = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}} = -\frac{3+k}{4-k}$$

परन्तु इस कुल के विशिष्ट सदस्य की प्रवणता 5 ज्ञात है।

इसलिए $$-\frac{3+k}{4-k} = 5$$

अर्थात $$k = \frac{23}{4}.$$

अतः अभीष्ट रेखा का समीकरण है

$$3x + 4y - 7 + \frac{23}{4}(x - y + 2) = 0$$

अर्थात $$35x - 7y + 18 = 0.$$

प्रश्नावली 11.8

1. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका y–अन्तःखण्ड 4 है तथा वह रेखा $2x - 3y = 7$ के समान्तर है।

2. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका y–अन्तःखण्ड -3 है तथा वह रेखा $3x + 5y = 4$ पर लम्ब है।

3. बिन्दु $(-2, -1)$ से जाने वाली रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो

(i) रेखा $x = 0$ के समान्तर है

(ii) रेखा $y = x$ पर लम्ब है।

4. एक त्रिभुज की भुजाओं AB, BC और CA के समीकरण क्रमशः $5x - 3y + 2 = 0$; $x - 3y - 2 = 0$ और $x + y - 6 = 0$ हैं। A से जाने वाले शीर्षाभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

5. रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ पर लम्ब रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो इस रेखा के y–अक्ष के साथ प्रतिच्छेदन–बिन्दु से होकर जाती है

6. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (x_1, y_1) से होकर जाने वाली तथा रेखा $Ax + By + C = 0$ के समान्तर रेखा का समीकरण $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ है।

7. रेखाओ $x + 2y = 5$ और $x - 3y = 7$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु

(i) $(0, 0)$ (ii) $(2, -3)$ (iii) $(1, 0)$ (iv) $(0, -1)$ से होकर जाती है।

8. रेखाओं $5x - 3y = 1$ और $2x + 3y - 23 = 0$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समीकरण

(i) $x - 2y = 3$ (ii) $x = 0$ (iii) $y = 0$ (iv) $5x - 3y - 1 = 0$

द्वारा निरूपित रेखा पर लम्ब है।

9. रेखाओं $x + 2y - 3 = 0$ और $4x - y + 7 = 0$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $5x + 4y - 20 = 0$ के समान्तर है।

10. रेखाओं $2x + 3y - 4 = 0$ और $x - 5y = 7$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु से जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x–अक्ष पर अन्तःखण्ड -4 काटती है।

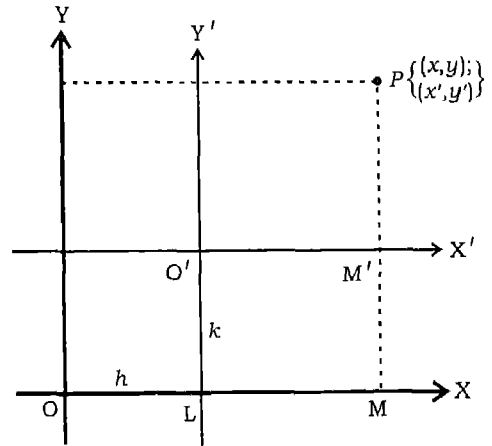
11. रेखाओं $4x + 7y - 3 = 0$ और $2x - 3y + 1 = 0$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो अक्षों पर समान अन्तःखण्ड काटती है।

11.8 निर्देशाक्षों का स्थानान्तरण

वैश्लेषिक ज्यामिति में हमें प्रायः दो प्रकार के प्रश्नों को हल करना पड़ता है, पहला एक ज्यामितीय आकृति या वक्र का समीकरणों के पद मे वर्णन करना तथा दूसरा एक दिए समीकरण का आलेख या संगत वक्र को ज्ञात करना, दोनों प्रकार की समस्याओं मे परस्पर समकोणिक निर्देशांको को लेकर बिन्दुओ के निर्देशांकों तथा बिन्दुओं के बीच साहचर्य स्थापित करना पड़ता है। वैश्लेषिक ज्यामिति में मूल बिन्दु का स्थान तथा निर्देशांको की दिशाएं महत्वपूर्ण भूमिका निभाती हैं।

एक निर्देशांक निकाय के सन्दर्भ में बिन्दुओं के एक समुच्चय के संगत समीकरण को दूसरे समुचित निर्देशांको में संशोधित करके सरल बनाया जा सकता है जिससे सभी ज्यामितीय गुणधर्म अपरिवर्तित रहते हैं। इस प्रकार के एक रूपातंरण मे मूल बिन्दु को स्थानान्तरित करके मौलि क अक्षों के समान्तर नए निर्देशांक्ष लेकर किया जाता है। इस प्रकार के परिवर्तन को निर्देशांक्षो का स्थानान्तरण कहते हैं।

आकृति 11.26

निर्देशाक्षों के स्थानान्तरण के अन्तर्गत तल के प्रत्येक बिन्दु के निर्देशांक परिवर्तित हो जाते हैं। पुराने निर्देशांकों तथा नए निर्देशांकों के बीच सम्बन्ध को जानकर हम वैश्लेषिक ज्यामिति के प्रश्नों को नए निर्देशांक निकाय के पदों मे अध्ययन कर सकते हैं।

निर्देशांकों में परिवर्तन को जानने के लिए हम OX और OY अक्षों के अनुसार एक बिन्दु $P(x,y)$ लेते हैं। मान लीजिए $O'X'$ और $O'Y'$ नए निर्देशांक्ष क्रमशः OX और OY के समांतर हैं। स्पष्टतः O' नया मूल बिन्दु है। मान लीजिए कि O' के निर्देशांक पुराने अक्षों के अनुसार (h, k) हैं। अतः $OL = h$ और $LO' = k$.

$OM = x$ और $MP = y$ (आकृति11.26).

मान लीजिए $O'M' = x'$ और $M'P = y'$ क्रमशः नए अक्षों $O'X'$ और $O'Y'$ के अनुसार बिन्दु P के भुज और कोटि हैं।

आकृति 11.26, से सरलतापूर्वक देखा जा सकता है, कि

$$OM = OL + LM = OL + O'M', \text{ अर्थात } x = h + x'$$

और $$MP = MM' + M'P = LO' + M'P, \text{ अर्थात } y = k + y'.$$

इस प्रकार $x = x' + h, y = y' + k.$

इन सूत्रो के द्वारा पुराने और नए निर्देशांकों के बीच सम्बन्ध ज्ञात होता है। इसलिए यदि बिन्दुओं P के एक समुच्चय (P के बिन्दु पथ) का OX तथा OY के अनुसार समीकरण $f(x, y) = 0$ है तो बिन्दुओं के उसी समुच्चय का समीकरण O को O' करने पर $f(x' + h, y' + k) = 0$, हो जाता हैं, जहाँ x', y' नये अक्षों पर $O'X'$ तथा $O'Y'$ के अनुसार निर्देशांक हैं।

अगली कक्षाओं में हम देखेंगे कि निर्देशाक्षों का स्थानान्तरण विभिन्न बिन्दु पथों के समीकरण को सरलतम रूप में प्राप्त करने का बहुत उपयोगी साधन है। इसके द्वारा ज्यामितीय गुणधर्मो की सरल वैश्लेषिक उपपत्ति दी जा सकती है।

उदाहरण 26 बिन्दु (3,–4) के नए निर्देशांक ज्ञात कीजिए, यदि मूल–बिन्दु को $(1, 2)$ पर स्थानान्तरित किया जाये।

हल नए मूल बिन्दु के निर्देशांक $h = 1, k = 2$ और बिन्दु के मूल–निर्देशांक $x = 3, y = -4$ हैं। पुराने निर्देशांक (x, y) से नये निर्देशांक (x', y') में परिवर्तन सूत्र

$$x = x' + h, \text{ अर्थात् } x' = x - h$$

और $$y = y' + k, \text{ अर्थात् } y' = y - k$$

मानों को प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं।

$$x' = 3 - 1 = 2 \text{ और } y' = -4 - 2 = -6.$$

अतः बिन्दु (3,– 4) के नए निकाय में निर्देशांक (2, – 6) हैं।

उदाहरण 27 सरल रेखा $2x - 3y + 5 = 0$, का परिवर्तित रूप ज्ञात कीजिए, जब निर्देशांक–स्थाानान्तरण द्वारा मूल बिन्दु को बिन्दु (3,–1) पर स्थानान्तरित किया जाता है।

हल मान लीजिए बिन्दु $P(x, y)$ के नए निर्देशांक (x', y') हो जाते हैं। इस स्थानान्तरण में मूल बिन्दु $h = 3, k = -1$ को स्थानान्तरित है। इस प्रकार हम परिवर्तन–सूत्र $x = x' + 3$ और $y = y' - 1$ लिखते हैं।

दिए गए समीकरण को हम मानों के स्थानान्तरित करके हम सरल रेखा का अभीष्ट समीकरण निम्नांकित है

$$2(x' + 3) - 3(y' - 1) + 5 = 0$$

और $$2x' - 3y' + 14 = 0.$$

इसलिए नए निकाय में रेखा का समीकरण $2x - 3y + 14 = 0$ है।

उदाहरण 28 उस बिन्दु को ज्ञात कीजिए, जहां मूल को स्थानान्तरित करने पर समीकरण $y^2 - 6y - 4x + 13 = 0$ का परिवर्तित रूप $y^2 + \text{A}\, x = 0$ हो जाए।

हल मान लीजिए कि मूल–बिन्दु को (h, k) पर स्थानान्तरित करने पर अभीष्ट रूप प्राप्त होता है। मान लीजिए कि बिन्दु P के निर्देशांक मौलिक निकाय के अनुसार (x, y) और नए निकाय के अनुसार (x', y') है।

तब

$$x = x' + h \text{ और } y = y' + k.$$

इन मानों को दिए समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर

$$(y' + k)^2 - 6(y' + k) - 4(x' + h) + 13 = 0$$

या $$(y')^2 - 4x' + (2k - 6)y' + (k^2 - 6k + 13 - 4h) = 0 \qquad (1)$$

चूँकि समीकरण का अभीष्ट रूप

$$y'^2 + \text{A}\, x' = 0,$$

स्पष्टतः इसमें y' का गुणांक और अचर पद शून्य हैं। अतः h और k के ऐसे मान होने चाहिए ताकि समीकरण (1), में y' का गुणांक और अचर पद शून्य हो जाय।

$$2k - 6 = 0 \text{ और } k^2 - 4h + 13 - 6k = 0,$$

अर्थात $$k = 3 \text{ और } h = 1.$$

अतः अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक (1, 3) है।

उदाहरण 29 सत्यापित कीजिए कि (2,3), (5,7) और (–3, –1) शीर्ष वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल निश्चर (invariant) रहता है, यदि मूल बिन्दु को (–1 ,3) पर स्थानान्तरित करके निर्देशांकों का स्थानान्तरण कर दिया जाता है।

हल मान लीजिए कि बिन्दुओं (2,3), (5,7) और (–3, –1) को क्रमशः A, B और C द्वारा व्यक्त किया जाता है। इस प्रकार त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$$\Delta = \frac{1}{2}\left|2[7-(-1)]+5(-1-3)+(-3)(3-7)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|16-20+12\right| = 4. \quad (1)$$

यदि मूल बिन्दु को $(-1, 3)$ पर स्थानान्तरण करके निर्देशांक्षों को किया जाय तो पुराने निर्देशांक (x, y) और नए निर्देशांक (x', y') में परिवर्तन समीकरण का प्रयोग करने पर

$x' = x + 1$ और $y' = y - 3$ प्राप्त होता है।

इसलिए नए निकाय के अनुसार बिन्दुओं A, B और C के निर्देशांक निम्नांकित हैं

$(2,3) \rightarrow (2+1, 3-3)$, अर्थात् , $(3,0)$

$(5,7) \rightarrow (5+1, 7-3)$ अर्थात् , $(6,4)$

$(-3,-1) \rightarrow (-3+1, -1-3)$, अर्थात् , $(-2, -4)$.

इसलिए नए निर्देशांकों के अनुसार त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$$\Delta' = \frac{1}{2}\left|3[4-(-4)]+6(-4-0)-2(0-4)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|24-24+8\right| = 4. \quad (2)$$

समीकरण (1) और (2), से हम पाते हैं कि

$$\Delta = \Delta',$$

अर्थात निर्देशाक्षों के स्थानान्तरण के अन्तर्गत त्रिभुज का क्षेत्रफल अपरिवर्तनशील है।

उदाहरण 30 सिद्ध कीजिए कि एक रेखा की प्रवणता निर्देशाक्षों के परिवर्तन के अन्तर्गत निश्चर है।

हल मान लीजिए कि एक निर्देशाक्ष तल के अनुसार रेखा का समीकरण

$$Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

इस रेखा की प्रवणता $m = -\frac{A}{B}$.

अब यदि मूल–बिन्दु को (h, k) पर स्थानान्तरित कर दिया जाय तो रेखा पर कोई बिन्दु (x', y') नए अक्षों के अनुसार निम्नांकित सम्बधों द्वारा व्यक्त होते हैं।

$x = x' + h$ और $y = y' + k$,

जहां (x, y) बिन्दुओं के निर्देशांक मौलिक अक्षों के अनुसार है। इसलिए नए निकाय के अनुसार रेखा का समीकरण

$$A(x' + h) + B(y' + k) + C = 0,$$

या $$A x' + B y' + (Ah + Bk + C) = 0 \qquad (2)$$

रेखा (2) की प्रवणता $m' = -\dfrac{A}{B}$, जो m के ही समान है।

अतः निर्देशांक के स्थानान्तरण के अन्तर्गत रेखा की प्रवणता निश्चर है।

प्रश्नावली 11.9

1. निम्नलिखित प्रत्येक में दिये बिन्दु के नए निर्देशांक ज्ञात कीजिए, यदि मूल बिन्दु को $(-3,-2)$ पर प्रेषित करके निर्देशांक का स्थानान्तरण किया गया हो।

(i) $(1,1)$ (ii) $(0,1)$ (iii) $(5,0)$ (iv) $(-1,-2)$

(v) $(3,-5)$ (vi) $(-2,1)$.

2. ज्ञात कीजिए, कि निम्नांकित समीकरणों का परिवर्तित रूप क्या है, यदि मूल बिन्दु को $(1,1)$ पर प्रेषित करके निर्देशाक्षों का स्थानान्तरण किया गया है।

(i) $x^2 + xy - 3y^2 - y + 2 = 0$.

(ii) $xy - y^2 - x + y = 0$.

(iii) $xy - x - y + 1 = 0$.

(iv) $x^2 - y^2 - 2x + 2y = 0$.

3. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहां मूल–बिन्दु को प्रेषित करने पर निर्देशाक्षों के स्थानान्तरण के कारण निम्नाकिंत प्रत्येक समीकरण में प्रथम घात के पद न हो।

(i) $y^2 + x^2 - 4x - 8y + 3 = 0$.

(ii) $x^2 + y^2 - 5x + 2y - 5 = 0$.

(iii) $x^2 - 12x + 4 = 0$.

विविध उदाहरण

उदाहरण 31 k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए ताकि तीन रेखाएं $2x + y - 3 = 0$, $5x + ky - 3 = 0$ और $3x - y - 2 = 0$ संगामी हों।

हल दी गयी रेखाओं के समीकरण हैं

$$2x + y - 3 = 0, \qquad (1)$$

$$5x + ky - 3 = 0 \qquad (2)$$

और $$3x - y - 2 = 0. \qquad (3)$$

समीकरणों (1) और (3) को तिर्यक–गुणन विधि से हल करने पर हम पाते है।

$$\frac{x}{-2-3}=\frac{y}{-9+4}=\frac{1}{-2-3}$$

या $\qquad x=1 \ , y=1$

इस प्रकार रेखाओं (1) और (3) के प्रतिच्छेदन बिन्दु का निर्देशांक (1,1) है।

चूँकि रेखाएं संगामी हैं, इसलिए बिन्दु (1, 1) समीकरण (2) को अवश्य संतुष्ट करेगी अर्थात

$$5+k-3=0$$

या $\qquad k=-2,$

जो k का अभीष्ट मान है जिससे रेखाएं संगामी होंगी।

उदाहरण 32 यदि मूल बिन्दु से रेखाओं $x \sec\theta + y \operatorname{cosec}\theta = k$ और $x\cos\theta - y\sin\theta = k\cos 2\theta$ पर डाले गये लम्बों की लम्बाईयां क्रमशः p और q हैं। सिद्ध कीजिए कि $4p^2+q^2 = k^2$.

हल दी गयी रेखाओं के समीकरण निम्नांकित हैं,

$$x \sec\theta + y \operatorname{cosec}\theta = k \qquad (1)$$

और $\qquad x\cos\theta - y\sin\theta = k\cos 2\theta. \qquad (2)$

चूँकि मूल–बिन्दु से (1) की दूरी p है। इसलिए

$$p=\frac{|0.\sec\theta+0.\operatorname{cosec}\theta-k|}{\sqrt{\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta}},$$

या $\qquad p^2 = k^2\sin^2\theta\cos^2\theta.$

इसी प्रकार रेखा (2) की मूल बिन्दु से दूरी q है। इसलिए

$$q^2 = k^2\cos^2 2\theta\,.$$

इसलिए

$$4p^2+q^2 = 4k^2\sin^2\theta\cos^2\theta + k^2\cos^2 2\theta$$

$$= k^2[(2\sin\theta\cos\theta)^2+\cos^2 2\theta]$$

$$= k^2(\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta) = k^2.$$

उदाहरण 33 उस अनुपात को ज्ञात कीजिए जिसमें रेखा $ax + by + c = 0$ बिन्दुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) के मिलान से बने रेखा–खण्ड को विभाजित करती है।

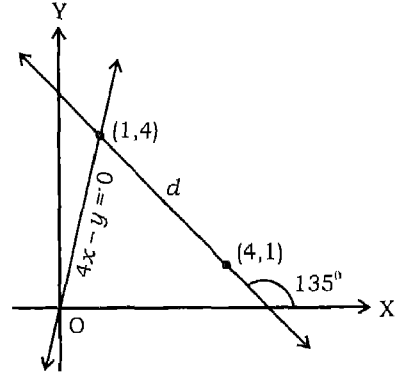
हल मान लीजिए कि बिन्दु P, (x_1, y_1) और (x_2, y_2) के मिलाने से बने रेखा खण्ड को $k : 1$ के अनुपात में विभाजित करता है। (इसलिए विभाजन सूत्र से P के निर्देशांक)

$$\left(\frac{k\,x_2 + x_1}{k+1}, \frac{k\,y_2 + y_1}{k+1}\right)$$

चूँकि बिन्दु P रेखा $ax + by + c = 0$, पर स्थित है, इसलिए

$$a\left(\frac{k\,x_2 + x_1}{k+1}\right) + b\left(\frac{k\,y_2 + y_1}{k+1}\right) + c = 0$$

या $\quad k(ax_2 + by_2 + c) + (ax_1 + by_1 + c) = 0$

या $\quad k = -\dfrac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c}.$

आकृति 11.27

इस प्रकार रेखा $ax + by + c = 0$, बिन्दुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) को मिलाने वाले रेखा–खण्ड को बाह्यत:

$(a\,x_1 + b\,y_1 + c) : (a\,x_2 + b\,y_2 + c)$ में बांटती है।

उदाहरण 34 बिन्दु (4, 1) से रेखा $4x - y = 0$ की दूरी, जो x–अक्ष के धन दिशा के साथ 135° का कोण बनाने वाली रेखा के अनुदिश नापी जाती है, ज्ञात कीजिए।

हल 135° के झुकाव पर बिन्दु (4,1) से जाने वाली रेखा का समीकरण है।

$$y - 1 = \tan 135°\,(x - 4)$$

या $\quad y - 1 = -1\,(x - 4)$

या $\quad x + y - 5 = 0. \qquad (1)$

समीकरण (1) और दिए समीकरण $4x - y = 0$ को हल करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{x}{0-5} = \frac{y}{-20-0} = \frac{1}{-1-4},$$

अर्थात $\quad x = 1,\ y = 4$

इस प्रकार रेखाओं (1) और (2) का प्रतिच्छेदन बिन्दु (1,4) है। इसलिए बिन्दु (4,1) की रेखा (1) के अनुदिश रेखा (2) तक की दूरी

$$d = \sqrt{(4-1)^2 + (1-4)^2} = 3\sqrt{2}.$$

उदाहरण 35 मूल बिन्दु से दूर, रेखा $x + 3y - 3 = 0$ द्वारा अक्षों के बीच अन्तःखण्ड पर एक वर्ग बनाया गया है। इसके विकर्णो के प्रतिच्छेदन बिन्दु के निर्देशांक तथा इसकी भुजाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि समीकरण

$$x + 3y - 3 = 0 \qquad (1)$$

द्वारा निरूपति रेखा x–अक्ष और y–अक्ष को क्रमशः बिन्दु A और B पर काटती है।

मान लीजिए कि ABCD एक वर्ग है तथा P इसके विकर्णो का प्रतिच्छेदन बिन्दु है। बिन्दुओं A तथा B के निर्देशांक क्रमशः (3,0) तथा (0,1) हैं।

रेखा A B की प्रवणता $-\frac{1}{3}$ है। मान लीजिए कि रेखा BD की प्रवणता m है।

चूँकि विकर्ण BD, AB के साथ 45° का कोण बनाता है। इसलिए

$$\tan 45° = \frac{m + \frac{1}{3}}{1 - \frac{m}{3}}$$

अर्थात $\quad m = \frac{1}{2}.$

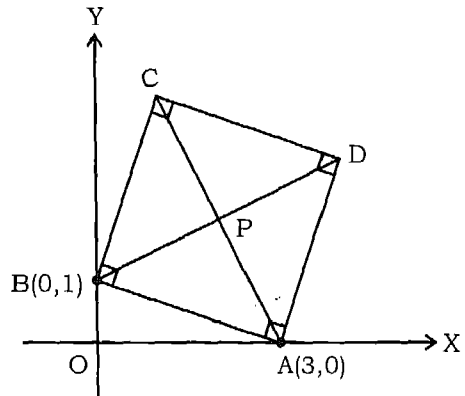
आकृति 11.28

अतः BD का समीकरण है,

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 0)$$

और $\quad x - 2y + 2 = 0. \qquad (1)$

विकर्ण AC, BD पर लम्ब है। अतः इसका समीकरण

$2x + y + k = 0$, हैं जहां k स्थिरांक ज्ञात करना है।

चूँकि रेखा AC बिन्दु (3,0) से जाती है, इसलिए

$$6 + 0 + k = 0, \text{ अर्थात } k = -6.$$

इस प्रकार विकर्ण AC का समीकरण

$$2x + y - 6 = 0 \text{ है।} \qquad (2)$$

समीकरणों (1) और (2) को हल करने पर हम विकर्णों AC तथा BD के प्रतिच्छेदन बिन्दु P के निर्देशांक (2, 2) पाते हैं।

भुजा BC, भुजा AB पर लम्ब है, और बिन्दु B से जाती है। इसलिए BC का समीकरण

$$y - 1 = 3(x - 0), \text{ अर्थात } 3x - y + 1 = 0 \text{ है।}$$

बिन्दु (2,2) रेखा–खण्ड BD का मध्य बिन्दु है। इसलिए D का निर्देशांक (4,3) है।

भुजा CD, बिन्दु (4,3) से जाने वाली AB के समान्तर रेखा है। इसलिए CD का समीकरण $y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 4)$, अर्थात $x + 3y - 13 = 0$ है

इसी प्रकार AD का समीकरण $3x - y - 9 = 0$ है।

अध्याय 11 पर विविध प्रश्नावली

1. बिन्दु (1,3) और (5,1) एक आयत के सम्मुख शीर्ष हैं। अन्य दो शीर्ष रेखा $y = 2x + c$ पर स्थित हैं। c का मान तथा शेष शीर्ष ज्ञात कीजिए।
2. एक समान्तर चर्तुभुज की संलग्न भुजाएं $4x + 5y = 0$ और $7x + 2y = 0$ हैं। यदि एक विकर्ण का समीकरण $11x + 7y = 9$ है, तो दूसरे विकर्ण का समीकरण ज्ञात कीजिए।
3. आयत की एक भुजा, रेखा $4x + 7y + 5 = 0$ के अनुदिश है। इसके दो शीर्ष (–3, 1) और (1,1) हैं। अन्य तीन भुजाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।
4. एक रेखा बिन्दु P (a, b) से होकर जाती है। यह बिन्दु, रेखा द्वारा अक्षों में अन्तः खण्ड भाग का समद्विभाजक भी है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ है।
5. बिन्दु (3, 2) से होकर जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखा $x - 2y = 3$ के साथ 45° का कोण बनाती है।
6. एक समद्विवाहु त्रिभुज के आधार के सिरों के निर्देशांक $(2a, 0)$ तथा $(0, a)$ हैं। इसकी एक भुजा का समीकरण $x = 2a$ है। त्रिभुज की अन्य दो भुजाओं का समीकरण तथा इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

7. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी रेखाओं $5x - y + 4 = 0$ तथा $3x + 4y - 4 = 0$ के बीच रेखा खण्ड, बिन्दु $(1, 5)$ पर समद्विभाजित होता है।

8. सिद्ध कीजिए कि चार रेखाओं

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=-1$ और $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=-1$ से बने समान्तर चर्तुभुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर काटते हैं।

9. एक वर्ग की एक भुजा x–अक्ष के साथ α कोण बनाती है और उसका एक सिरा मूल बिन्दु है। यदि वर्ग की भुजा 4 इकाई लम्बी हो तो वर्ग के विकर्णों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

10. p का ऐसा मान ज्ञात कीजिए, ताकि तीनों रेखाएं $3x + y - 2 = 0$, $px + 2y - 3 = 0$ और $2x - y - 3 = 0$ संगामी हों।

11. रेखाओं $y - x = 0$, $x + y = 0$ और $x - k = 0$ से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170						5	9	13	17	21	26	30	34	38
						0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	16	20	24	28	32	36
11	0414	0453	0492	0531	0569						4	8	12	16	20	23	27	31	35
						0607	0645	0682	0719	0755	4	7	11	15	18	22	26	29	33
12	0792	0828	0864	0899	0934						3	7	11	14	18	21	25	28	32
						0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	20	24	27	31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3	6	10	13	16	19	23	26	29
						1303	1335	1367	1399	1430	3	7	10	13	16	19	22	25	29
14	1461	1492	1523	1553	1584						3	6	9	12	15	19	22	25	28
						1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	14	17	20	23	26
15	1761	1790	1818	1847	1875						3	6	9	11	14	17	20	23	26
						1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	19	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148						3	6	8	11	14	16	19	22	24
						2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	10	13	16	18	21	23
17	2304	2330	2355	2380	2405						3	5	8	10	13	15	18	20	23
						2430	2455	2480	2504	2529	3	5	8	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2	5	7	9	12	14	17	19	21
						2672	2695	2718	2742	2765	2	4	7	9	11	14	16	18	21
19	2788	2810	2833	2856	2878						2	4	7	9	11	13	16	18	20
						2900	2923	2945	2967	2989	2	4	6	8	11	13	15	17	19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6471	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	5	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7768	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8466	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

.N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	3	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	3	4	5	6	6

प्रतिलघुगणक

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5476	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

सारणी III
त्रिकोणमितीय फलनों के चार स्थान तक मान
कोण θ, अंशों और रेडियनों में

कोण θ									
अंश	रेडियन	sin θ	csc θ	tan θ	cot θ	sec θ	cos θ		
0° 00′	.0000	.0000	कोई मान नहीं	.0000	कोई मान नहीं	1.000	1.0000	1.5708	**90° 00′**
10	029	029	343.8	029	343.8	000	000	679	50
20	058	058	171.9	058	171.9	000	000	650	40
30	.0087	.0087	114.6	.0087	114.6	1.000	1.0000	1.5621	30
40	116	116	85.95	116	85.94	000	.9999	592	20
50	145	145	68.76	145	68.75	000	999	563	10
1° 00′	.0175	.0175	57.30	.0175	57.29	1.000	.9998	1.5533	**89° 00′**
10	204	204	49.11	204	49.10	000	998	504	50
20	233	233	42.98	233	42.96	000	997	475	40
30	.0262	.0262	38.20	.0262	38.19	1.000	.9997	1.5446	30
40	291	291	34.38	291	34.37	000	996	417	20
50	320	320	31.26	320	31.24	001	995	388	10
2° 00′	.0349	.0349	28.65	.0349	28.64	1.001	.9994	1.5359	**88° 00′**
10	378	378	26.45	378	26.43	001	993	330	50
20	407	407	24.56	407	24.54	001	992	301	40
30	.0436	.0436	22.93	.0437	22.90	1.001	.9990	1.5272	30
40	465	465	21.49	466	21.47	001	989	243	20
50	495	494	20.23	495	20.21	001	988	213	10
3° 00′	.0524	.0523	19.11	.0524	19.08	1.001	.9986	1.5184	**87° 00′**
10	553	552	18.10	553	18.07	002	985	155	50
20	582	581	17.20	582	17.17	002	983	126	40
30	.0611	.0610	16.38	.0612	16.35	1.002	.9981	1.5097	30
40	640	640	15.64	641	15.60	002	980	068	20
50	669	669	14.96	670	14.92	002	978	039	10
4° 00′	.0698	.0698	14.34	.0699	14.30	1.002	.9976	1.5010	**86° 00′**
10	727	727	13.76	729	13.73	003	974	981	50
20	756	756	13.23	758	13.20	003	971	952	40
30	.0785	.0785	12.75	.0787	12.71	1.003	.9969	1.4923	30
40	814	814	12.29	816	12.25	003	967	893	20
50	844	843	11.87	846	11.83	004	964	864	10
5° 00′	.0873	.0872	11.47	.0875	11.43	1.004	.9962	1.4835	**85° 00′**
10	902	901	11.10	904	11.06	004	959	806	50
20	931	929	10.76	934	10.71	004	957	777	40
30	.0960	.0958	10.43	.0963	10.39	1.005	.9954	1.4748	30
40	989	987	10.13	992	10.08	005	951	719	20
50	.1018	.1016	9.839	.1022	9.788	005	948	690	10
6° 00′	.1047	.1045	9.567	.1051	9.514	1.006	.9945	1.4661	**84° 00′**
		cos θ	sec θ	cot θ	tan θ	csc θ	sin θ	रेडियन	अंश
								कोण θ	

कोण θ									
अंश	रेडियन	sin θ	csc θ	tan θ	cot θ	sec θ	cos θ		
6° 00′	.1047	.1045	9.567	.1051	9.514	1.006	.9945	1.4661	**84° 00′**
10	076	074	9.309	080	9.255	006	942	632	50
20	105	103	9.065	110	9.010	006	939	603	40
30	.1134	.1132	8.834	.1139	8.777	1.006	.9936	1.4573	30
40	164	161	8.614	169	8.556	007	932	544	20
50	193	190	8.405	198	8.345	007	929	515	10
7° 00′	.1222	.1219	8.206	.1228	8.144	1.008	.9925	1.4486	**83° 00′**
10	251	248	8.016	257	7.953	008	922	457	50
20	280	276	7.834	287	7.770	008	918	428	40
30	.1309	.1305	7.661	.1317	7.596	1.009	.9914	1.4399	30
40	338	334	7.496	346	7.429	009	911	370	20
50	367	363	7.337	376	7.269	009	907	341	10
8° 00′	.1396	.1392	7.185	.1405	7.115	1.010	.9903	1.4312	**82° 00′**
10	425	421	7.040	435	6.968	010	899	283	50
20	454	449	6.900	465	6.827	011	894	254	40
30	.1484	.1478	6.765	.1495	6.691	1.011	.9890	1.4224	30
40	513	507	6.636	524	6.561	012	886	195	20
50	542	536	6.512	554	6.435	012	881	166	10
9° 00′	.1571	.1564	6.392	.1584	6.314	1.012	.9877	1.4137	**81° 00′**
10	600	593	277	614	197	013	872	108	50
20	629	622	166	644	084	013	868	079	40
30	.1658	.1650	6.059	.1673	5.976	1.014	.9863	1.4050	30
40	687	679	5.955	703	871	014	858	1.4021	20
50	716	708	855	733	769	015	853	992	10
10° 00′	.1745	.1736	5.759	.1763	5.671	1.015	.9848	1.3963	**80° 00′**
10	774	765	665	793	576	016	843	934	50
20	804	794	575	823	485	016	838	904	40
30	.1833	.1822	5.487	.1853	5.396	1.017	.9833	1.3875	30
40	862	851	403	883	309	018	827	846	20
50	891	880	320	914	226	018	822	817	10
11° 00′	.1920	.1908	5.241	.1944	5.145	1.019	.9816	1.3788	**79° 00′**
10	949	937	164	974	066	019	811	759	50
20	978	965	089	.2004	4.989	020	805	730	40
30	.2007	.1994	5.016	.2035	4.915	1.020	.9799	1.3701	30
40	036	.2022	4.945	065	843	021	793	672	20
50	065	051	876	095	773	022	787	643	10
12° 00′	.2094	.2079	4.810	.2126	4.705	1.022	.9781	1.3614	**78° 00′**
10	123	108	745	156	638	023	775	584	50
20	153	136	682	186	574	024	769	555	40
30	.2182	.2164	4,620	.2217	4.511	1.024	.9763	1.3526	30
40	211	193	560	247	449	025	757	497	20
50	240	221	502	278	390	026	750	468	10
13° 00′	.2269	.2250	4.445	.2309	4.331	1.026	.9744	1.3439	**77° 00′**
		cos θ	sec θ	cot θ	tan θ	csc θ	sin θ	रेडियन	अंश
								कोण θ	

कोण θ									
अंश	रेडियन	sin θ	csc θ	tan θ	cot θ	sec θ	cos θ		
13° 00′	.2269	.2250	4.445	.2309	4.331	1.026	.9744	1.3439	**77° 00′**
10	298	278	390	339	275	027	737	410	50
20	327	306	336	370	219	028	730	381	40
30	.2356	.2334	4.284	.2401	4.165	1.028	.9724	1.3352	30
40	385	363	232	432	113	029	717	323	20
50	414	391	182	462	061	030	710	294	10
4° 00′	.2443	.2419	4.134	.2493	4.011	1.031	.9703	1.3265	**76° 00′**
10	473	447	086	524	3.962	031	696	236	50
20	502	476	039	555	914	032	689	206	40
30	.2531	.2504	3.994	.2586	3.867	1.033	.9681	1.3177	30
40	560	532	950	617	821	034	674	148	20
50	589	560	906	648	776	034	667	119	10
15° 00′	.2618	.2588	3.864	.2679	3.732	1.035	.9659	1.3090	**75° 00′**
10	647	616	822	711	689	036	652	061	50
20	676	644	782	742	647	037	644	032	40
30	.2705	.2672	3.742	.2773	3.606	1.038	.9636	1.3003	30
40	734	700	703	805	566	039	628	974	20
50	763	728	665	836	526	039	621	945	10
16° 00′	.2793	.2756	3.628	.2867	3.487	1.040	.9613	1.2915	**74° 00′**
10	822	784	592	899	450	041	605	886	50
20	851	812	556	931	412	042	596	857	40
30	.2880	.2840	3.521	.2962	3.376	1.043	.9588	1.2828	30
40	909	868	487	994	340	044	580	799	20
50	938	896	453	.3026	305	045	572	770	10
17° 00′	.2967	.2924	3.420	.3057	3.271	1.046	.9563	1.2741	**73° 00′**
10	996	952	388	089	237	047	555	712	50
20	.3025	979	357	121	204	048	546	683	40
30	.3054	.3007	3.326	.3153	3.172	1.048	.9537	1.2654	30
40	083	035	295	185	140	049	528	625	20
50	113	062	265	217	108	050	520	595	10
18° 00′	.3142	.3090	3.236	.3249	3.078	1.051	.9511	1.2566	**72° 00′**
10	171	118	207	281	047	052	502	537	50
20	200	145	179	314	018	053	492	508	40
30	.3229	.3173	3.152	.3346	2.989	1.054	.9483	1.2479	30
40	258	201	124	378	960	056	474	450	20
50	287	228	098	411	932	057	465	421	10
19° 00′	.3316	.3256	3.072	.3443	2.904	1.058	.9455	1.2392	**71° 00′**
10	345	283	046	476	877	059	446	363	50
20	374	311	021	508	850	060	436	334	40
30	.3403	.3338	2.996	.3541	2.824	1.061	.9426	1.2305	30
40	432	365	971	574	798	062	417	275	20
50	462	393	947	607	773	063	407	246	10
20° 00′	.3491	.3420	2.924	.3640	2.747	1.064	.9397	1.2217	**70° 00′**
		cos θ	sec θ	cot θ	tan θ	csc θ	sin θ	रेडियन	अंश
								कोण θ	

कोण θ									
अंश	रेडियन	sin θ	csc θ	tan θ	cot θ	sec θ	cos θ		
20° 00′	.3491	.3420	2.924	.3640	2.747	1.064	.9397	1.2217	**70° 00′**
10	520	448	901	673	723	065	387	188	50
20	549	475	878	706	699	066	377	159	40
30	.3578	.3502	2.855	.3739	2.675	1.068	.9367	1.2130	30
40	607	529	833	772	651	069	356	101	20
50	636	557	812	805	628	070	346	072	10
21° 00′	.3665	.3584	2.790	.3839	2.605	1.071	.9336	1.2043	**69° 00′**
10	694	611	769	872	583	072	325	1.2014	50
20	723	638	749	906	560	074	315	985	40
30	.3752	.3665	2.729	.3939	2.539	1.075	.9304	1.1956	30
40	782	692	709	973	517	076	293	926	20
50	811	719	689	.4006	496	077	283	897	10
22° 00′	.3840	.3746	2.669	.4040	2.475	1.079	.9272	1.1868	**68° 00′**
10	869	773	650	074	455	080	261	839	50
20	898	800	632	108	434	081	250	810	40
30	.3927	.3827	2.613	.4142	2.414	1.082	.9239	1.1781	30
40	956	854	595	176	394	084	228	752	20
50	985	881	577	210	375	085	216	723	10
23° 00′	.4014	.3907	2.559	.4245	2.356	1.086	.9205	1.1694	**67° 00′**
10	043	934	542	279	337	088	194	665	50
20	072	961	525	314	318	089	182	636	40
30	.4102	.3987	2.508	.4348	2.300	1.090	0.9171	1.1606	30
40	131	.4014	491	383	282	092	159	577	20
50	160	041	475	417	264	093	147	548	10
24° 00′	.4189	.4067	2.459	.4452	2.246	1.095	.9135	1.1519	**66° 00′**
10	218	094	443	487	229	096	124	490	50
20	247	120	427	522	211	097	112	461	40
30	.4276	.4147	2.411	.4557	2.194	1.099	.9100	1.1432	30
40	305	173	396	592	177	100	088	403	20
50	334	200	381	628	161	102	075	374	10
25° 00′	.4363	.4226	2.366	.4663	2.145	1.103	.9063	1.1345	**65° 00′**
10	392	253	352	699	128	105	051	316	50
20	422	279	337	734	112	106	038	236	40
30	.4451	.4305	2.323	.4770	2.097	1.108	.9026	1.1257	30
40	480	331	309	806	081	109	013	228	20
50	509	358	295	841	066	111	001	199	10
26° 00′	.4538	.4384	2.281	.4877	2.050	1.113	.8988	1.1170	**64° 00′**
10	567	410	268	913	035	114	975	141	50
20	596	436	254	950	020	116	962	112	40
30	.4625	.4462	2.241	.4986	2.006	1.117	.8949	1.1083	30
40	654	488	228	.5022	1.991	119	936	054	20
50	683	514	215	059	977	121	923	1.1025	10
27° 00′	.4712	.4540	2.203	.5093	1.963	1.122	.8910	1.0996	**63° 00′**
		cos θ	sec θ	cot θ	tan θ	csc θ	sin θ	रेडियन	अंश
								कोण θ	

कोण θ									
अंश	रेडियन	sin θ	csc θ	tan θ	cot θ	sec θ	cos θ		
27° 00′	.4712	.454	2.203	.5095	1.963	1.122	.8910	1.0996	**63° 00′**
10	741	566	190	132	949	124	897	966	50
20	771	592	178	169	935	126	884	937	40
30	.4800	.4617	2.166	.5206	1.921	1.127	.8870	1.0908	30
40	829	648	154	243	907	129	857	879	20
50	858	669	142	280	894	131	843	850	10
28° 00′	.4887	.4695	2.130	.5317	1.881	1.133	.8829	1.0821	**62° 00′**
10	916	720	118	354	868	134	816	792	50
20	945	746	107	392	855	136	802	763	40
30	.4974	.4772	2.096	.5430	1.842	1.138	.8788	1.0734	30
40	.5003	797	085	467	829	140	774	705	20
50	032	823	074	505	816	142	760	676	10
29° 00′	.5061	.4848	2.063	.5543	1.804	1.143	.8746	1.0647	**61° 00′**
10	091	874	052	581	792	145	732	617	50
20	120	899	041	619	780	147	718	588	40
30	.5149	.4924	2.031	.5658	1.767	1.149	.8704	1.0559	30
40	178	950	020	696	756	151	689	530	20
50	207	975	010	735	744	153	675	501	10
30° 00′	.5236	.5000	2.000	.5774	1.732	1.155	.8660	1.0472	**60° 00′**
10	265	025	1.990	812	720	157	646	443	50
20	294	050	980	851	709	159	631	414	40
30	.5323	.5075	1.970	.5890	1.698	1.161	.8616	1.0385	30
40	352	100	961	930	686	163	601	356	20
50	381	125	951	969	675	165	587	327	10
31° 00′	.5411	0.5150	1.942	.6009	1.664	1.167	.8572	1.0297	**59° 00′**
10	440	175	932	048	653	169	557	268	50
20	469	200	923	088	643	171	542	239	40
30	.5498	.5225	1.914	.6128	1.632	1.173	.8526	1.0210	30
40	527	250	905	168	621	175	511	181	20
50	556	275	896	208	611	177	496	152	10
32° 00′	.5585	.5299	1.887	.6249	1.600	1.179	.8480	1.0123	**58° 00′**
10	614	324	878	289	590	181	465	094	50
20	643	348	870	330	580	184	450	065	40
30	.5672	.5373	1.861	.6371	1.570	1.186	.8434	1.0036	30
40	701	398	853	412	560	188	418	1.0007	20
50	730	422	844	453	550	190	403	977	10
33° 00′	.5760	.5446	1.836	.6494	1.540	1.192	.8387	0.9948	**57° 00′**
10	789	471	828	536	530	195	371	919	50
20	818	495	820	577	520	197	355	890	40
30	.5847	.5519	1.812	.6619	1.511	1.199	.8339	0.9861	30
40	876	544	804	661	501	202	323	832	20
50	905	568	796	703	1.492	204	307	803	10
34° 00′	.5934	.5592	1.788	.6745	1.483	1.206	.8290	0.9774	**56° 00′**
		cos θ	sec θ	cot θ	tan θ	csc θ	sin θ	रेडियन	अंश
								कोण θ	

कोण θ									
अंश	रेडियन	sin θ	csc θ	tan θ	cot θ	sec θ	cos θ		
34° 00′	.5934	.5592	1.788	.6745	1.483	1.206	.8290	.9774	**56° 00′**
10	963	616	781	787	473	209	274	745	50
20	992	640	773	830	464	211	258	716	40
30	.6021	.5664	1.766	.6873	1.455	1.213	.8241	.9687	30
40	050	688	758	916	446	216	225	657	20
50	080	712	751	959	437	218	208	628	10
35° 00′	.6109	.5736	1.743	.7002	1.428	1.221	.8192	.9599	**55° 00′**
10	138	760	736	046	419	223	175	570	50
20	167	783	729	089	411	226	158	541	40
30	.6196	.5807	1.722	.7133	1.402	1.228	.8141	.9512	30
40	225	831	715	177	393	231	124	483	20
50	254	854	708	221	385	233	107	454	10
36° 00′	.6283	.5878	1.701	.7265	1.376	1.236	.8090	.9425	**54° 00′**
10	312	901	695	310	368	239	073	396	50
20	341	925	688	355	360	241	056	367	40
30	.6370	.5948	1.681	.7400	1.351	1.244	.8039	.9338	30
40	400	972	675	445	343	247	021	308	20
50	429	995	668	490	335	249	004	279	10
37° 00′	.6458	.6018	1.662	.7536	1.327	1.252	.7986	.9250	**53° 00′**
10	487	041	655	581	319	255	969	221	50
20	516	065	649	627	311	258	951	192	40
30	.6545	.6088	1.643	.7673	1.303	1.260	.7934	.9163	30
40	574	111	636	720	295	263	916	134	20
50	603	134	630	766	288	266	898	105	10
38° 00′	.6632	.6157	1.624	.7813	1.280	1.269	.7880	.9076	**52° 00′**
10	661	180	618	860	272	272	862	047	50
20	690	202	612	907	265	275	844	.9018	40
30	.6720	.6225	1.606	.7954	1.257	1.278	.7826	.8988	30
40	749	248	601	.8002	250	281	808	959	20
50	778	271	595	050	242	284	790	930	10
39° 00′	.6807	.6293	1.589	.8098	1.235	1.287	.7771	.8901	**51° 00′**
10	836	316	583	146	228	290	.753	872	50
20	865	338	578	195	220	293	735	843	40
30	.6894	.6361	1.572	.8243	1.213	1.296	.7716	.8814	30
40	923	383	567	292	206	299	698	785	20
50	952	406	561	342	199	302	679	756	10
40° 00′	.6981	.6428	1.556	.8391	1.192	1.305	.7660	.8727	**50° 00′**
10	.7010	450	550	441	185	309	642	698	50
20	039	472	545	491	178	312	623	668	40
30	.7069	.6494	1.540	.8541	1.171	1.315	.7604	.8639	30
40	098	517	535	591	164	318	585	610	20
50	127	539	529	642	157	322	566	581	10
41° 00′	.7156	.6561	1.524	.8693	1.150	1.325	.7547	.8552	**49° 00′**
		cos θ	sec θ	cot θ	tan θ	csc θ	sin θ	रेडियन	अंश
								कोण θ	

कोण θ									
अंश	रेडियन	sin θ	csc θ	tan θ	cot θ	sec θ	cos θ		
41° 00′	.7156	.6561	1.524	.8693	1.150	1.325	.7547	.8552	**49° 00′**
10	185	583	519	744	144	328	528	523	50
20	214	604	514	796	137	332	509	494	40
30	.7243	.6626	1.509	.8847	1.130	1.335	.7490	.8465	30
40	272	648	504	899	124	339	470	436	20
50	301	670	499	952	117	342	451	407	10
42° 00′	.7330	.6691	1.494	.9004	1.111	1.346	.7431	.8378	**48° 00′**
10	359	713	490	057	104	349	412	348	50
20	389	734	485	110	098	353	392	319	40
30	.7418	.6756	1.480	.9163	1.091	1.356	.7373	.8290	30
40	447	777	476	217	085	360	353	261	20
50	476	799	471	271	079	364	333	232	10
43° 00′	.7505	.6820	1.466	.9325	1.072	1.367	.7314	.8203	**47° 00′**
10	534	841	462	380	066	371	294	174	50
20	563	862	457	435	060	375	274	145	40
30	.7592	.6884	1.453	.9490	1.054	1.379	.7254	.8116	30
40	621	905	448	545	048	382	234	087	20
50	650	926	444	601	042	386	214	058	10
44° 00′	.7679	.6947	1.440	.9657	1.036	1.390	.7193	.8029	**46° 00′**
10	709	967	435	713	030	394	173	.7999	50
20	738	988	431	770	024	398	153	970	40
30	.7767	.7009	1.427	.9827	1.018	1.402	.7133	.7941	30
40	796	030	423	884	012	406	112	912	20
50	825	050	418	942	006	410	092	883	10
45° 00′	.7854	.7071	1.414	1.000	1.000	1.414	.7071	.7854	**45° 00′**
		cos θ	sec θ	cot θ	tan θ	csc θ	sin θ	रेडियन	अंश
								कोण θ	

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

1. (i), (iv), (v), (vi), (vii) और (viii) समुच्चय हैं।

2. (i) $\in$ (ii) $\notin$ (iii) $\notin$ (iv) $\in$ (v) $\in$ (vi) $\notin$

3. (i) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(ii) $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(iii) $C = \{17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80\}$

(iv) $D = \{2, 3, 5\}$

(v) $E = \{T, R, I, G, O, N, M, E, Y\}$

(vi) $F = \{S, E, T\}$

4. (i) A = {x : x 10 से छोटी विषम प्राकृत संख्या हैं}

(ii) B = {x : x 10 से छोटी सम प्राकृत संख्या हैं}

(iii) C = {x : x एक विषम पूर्णांक है और $|x| < 2$ }

(iv) D = {x : x 5 का गुणज प्राकृत संख्या है और $x = 1$}

(v) E = {x : x 7 का गुणज प्राकृत संख्या है और $7 < x < 100$}

5. (i) $A = \{1, 3, 5, 7, ...\}$

(ii) $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

(iii) $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

(iv) $D = \{L, O, Y, A\}$

(v) E = {फरवरी, अप्रैल, जून, सितम्बर, नवम्बर}

(vi) $F = \{b, c, d, f, g, h, j\}$

6. (i) $\leftrightarrow$(c), (ii) $\leftrightarrow$(a), (iii) $\leftrightarrow$(d), (iv) $\leftrightarrow$(b)

प्रश्नावली 1.2

1. (i) परिमित (ii) अपरिमित (iii) परिमित (iv) अपरिमित (v) परिमित

2. (i) अपरिमित (ii) परिमित (iii) अपरिमित (iv) परिमित (v) अपरिमित

3. (i) , (iii), (iv)

4. (i) हाँ (ii) नहीं (iii) हाँ (iv) नहीं

5. (i) नहीं (ii) हाँ

6. B = D, C = F; A, E, H समतुल्य समुच्चय हैं और D, G समतुल्य समुच्चय हैं।

प्रश्नावली 1.3

1. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) असत्य (v) सत्य

2. (i) $\subset$ (ii) $\not\subset$ (iii) $\subset$ (iv) $\not\subset$
(v) $\not\subset$ (vi) $\subset$ (vii) $\subset$

3. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) सत्य (iv) सत्य (v) असत्य (vi) सत्य

4. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) सत्य (iv) सत्य (v) असत्य (vi) सत्य
(vii) असत्य (viii) असत्य (ix) असत्य (x) असत्य

5. A = B = E, C = D = F

6. (i) X = {1}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}
(ii) X = {1}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}
(iii) ϕ, {2}

7. (i) असत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) सत्य (v) असत्य (vi) सत्य

8. 1

9. (i) सत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) असत्य (vi) सत्य
(vii) सत्य (viii) सत्य (ix) सत्य

10. नहीं, A = {1, 2}, B = {1, 2, 3}, C = {{1, 2, 3}}

प्रश्नावली 1.4

1. (i) $A \cup B = \{a, e, i, o, u, b, c\}$
(ii) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$
(iii) $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 3, 6, 9, 12, ...\}$

(iv) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(v) $A \cup B = \{1, 2, 3\}$

2. हाँ, $A \cup B = \{a, b, c\}$ **3.** B

4. (i) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(iii) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (iv) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(v) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (vi) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(vii) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

5. (i) $A \cap B = \{a\}$ (ii) $A \cap B = \{1, 3\}$ (iii) $\{3\}$

6. (i) $\{7, 9, 11\}$ (ii) $\{11, 13\}$ (iii) ϕ (iv) $\{11\}$

(v) ϕ (vi) $\{11\}$ (vii) ϕ (viii) $\{7, 9, 11\}$

(ix) $\{7, 9, 11\}$ (x) $\{7, 9, 11, 15\}$

7. (i) B (ii) C (iii) D

(iv) ϕ (v) $\{2\}$ (vi) $\{x : x$ एक विषम अभाज्य संख्या है।$\}$.

8. (iii)

9. (i) $\{3, 6, 15, 18, 21\}$ (ii) $\{3, 15, 18, 21\}$ (iii) $\{3, 6, 12, 18, 21\}$

(iv) $\{4, 8, 16, 20\}$ (v) $\{2, 4, 8, 10, 14, 16\}$ (vi) $\{5, 10, 20\}$

(vii) $\{20\}$ (viii) $\{4, 8, 12, 16\}$ (ix) $\{2, 6, 10, 14\}$

(x) $\{5, 10, 15\}$ (xi) $\{2, 4, 6, 8, 12, 14, 16\}$ (xii) $\{5, 15, 20\}$

10. (i) $\{a, c\}$ (ii) $\{f, g\}$ (iii) $\{b, d\}$

11. अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय

12. (i) असत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) सत्य

13. (i) $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ (ii) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (iii) $\{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(iv) $\{5, 7, 9\}$ (v) $\{1, 2, 3, 4\}$ (vi) $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

14. (i) $\{d, e, f, g, h\}$ (ii) $\{a, b, c, h\}$ (iii) $\{b, d, f, h\}$

(iv) $\{b, c, d, e\}$

15. (i) $\{x : x$ विषम प्राकृत संख्या है$\}$

(ii) $\{x : x$ सम प्राकृत संख्या है$\}$

(iii) $\{x : x \in \mathbf{N}$ और x 3 का गुणज नहीं है$\}$

(iv) $\{x : x$ एक धन यौगिक संख्या है और $x = 1\}$

(v) $\{x : x \in \mathbf{N}$ और x एक पूर्ण वर्ग नहीं है$\}$

(vi) $\{x : x \in \mathbf{N}$ और x एक पूर्ण घन नहीं है$\}$

(vii) $\{x : x \in \mathbf{N}$ और $x \neq 3\}$

(viii) $\{x : x \in \mathbf{N}$ और $x \neq 2\}$

(ix) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(x) $\{x : x \in \mathbf{N}$ और x, 3 और 5 द्वारा विभाज्य नहीं है$\}$

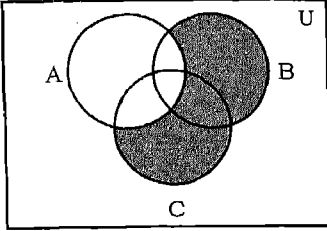
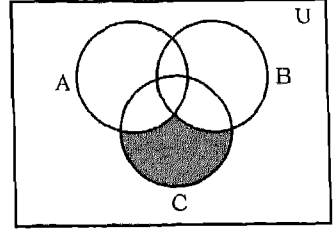
20. (i)

(ii)

U

A

B

C

प्रश्नावली 1.5

1. 2 **2.** 5 **3.** 50 **4.** 42 **5.** 30 **6.** 19 **7.** 25, 35

8. 60 **9.** 80 **10.** 11 **11.** 18, 3 **12.** 20, 30

अध्याय 1 पर विविध प्रश्नावली

1. $A \subset B, A \subset C, B \subset C, D \subset A, D \subset B, D \subset C$.

3. (i) असत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) असत्य (v) असत्य (vi) सत्य

4. (i) $\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}$

9. असत्य

14. हम ले सकते हैं $A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}, C = \{2, 3\}$

15. 325 **16.** 125 **17.** 52, 30

प्रश्नावली 2.1

1. $x = 3, \ y = -1$

2. (i) $\{(a, p), (a, q), (b, p), (b, q), (c, p), (c, q)\}$

(ii) $\{(p, a), (p, b), (p, c), (q, a), (q, b), (q, c)\}$

(iii) $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$

(iv) $\{(p, p), (p, q), (q, p), (q, q)\}$

5. $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$

6. ϕ, $\{(1, 3)\}$, $\{(1, 4)\}$, $\{(2, 3)\}$, $\{(2, 4)\}$, $\{(1, 3), (1, 4)\}$, $\{(1, 3), (2, 3)\}$, $\{(1, 3), (2, 4)\}$, $\{(1, 4), (2, 3)\}$, $\{(1, 4), (2, 4)\}$, $\{(2, 3), (2, 4)\}$, $\{(1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$, $\{(1, 3), (1, 4), (2, 4)\}$, $\{(1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$, $\{(1, 3), (2, 3), (2, 4)\}$, $A \times B$

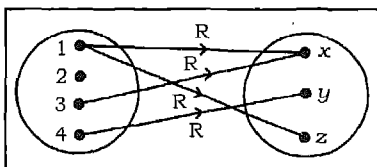
7. $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 2\}$

10. $A = \{-1, 0, 1\}$; $(-1, -1), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (1, -1), (1, 0), (1, 1)$

प्रश्नावली 2.2

1. प्रान्त $= \{1, 3, 4\}$, परिसर $= \{x, y, z\} = B$

2.

3.

R	x	y	z
1	1	0	1
2	0	0	0
3	I	0	0
4	0	1	0

4. (i) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6) (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (6, 6)\}$

(ii) प्रान्त = A.

(iii) परिसर = A

5. (i) $R = \{(a, b) : a$ और b सम पूर्णांक हैं$\} \cup \{(c, d) : c$ और d विषम पूर्णांक हैं$\}$

(ii) प्रान्त = Z

(iii) परिसर = Z

6. (i) $R = \{(a, a) : a \in Z\} \cup \{(a, -a) : a \in Z\}$

(ii) प्रान्त = Z

(iii) परिसर = Z

7. प्रान्त $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, परिसर $= \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

8. प्रान्त $= \{2, 3, 5, 7\}$, परिसर $= \{8, 27, 125, 343\}$.

9. (i) प्रान्त = {1}, परिसर = {2, 4, 6, 8}

(ii) प्रान्त = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, परिसर = {9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1}.

(iii) प्रान्त = {1, 2, 3, 4}, परिसर = {3}

(iv) प्रान्त = {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}, परिसर = {4, 3, 1, 0, 2}

10. ϕ, {(1, 1)}, {(2, 2)}, {(1, 2)}, {(2, 1)}, {(1, 1), (2, 2)}, {(1, 1), (1, 2)}, {(1, 1), (2, 1)}, {(2, 2), (1, 2)}, {(2, 2), (2, 1)}, {(1, 2), (2, 1)}, {(1, 1), (2, 2), (1, 2)}, {(1, 1), (2, 2), (2, 1)}, {(1, 1), (1, 2), (2, 1)}, {(2, 2), (1, 2), (2, 1)}, A

11. 64

प्रश्नावली 2.3

1. (i) प्रान्त = {2, 5, 8, 11, 14, 17}, परिसर = {1}

(ii) प्रान्त = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}, परिसर = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

(iii) नहीं (iv) नहीं (v) प्रान्त = {2, 3, 5}, परिसर = {1, 2}

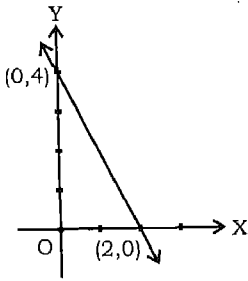
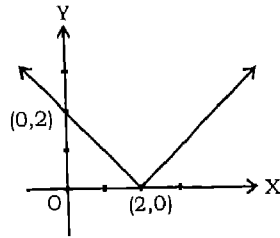
(vi) प्रान्त = {1, 2, 3}, परिसर = {2}

2. (i) प्रान्त = R –{1}, परिसर = R –{2}

(ii) प्रान्त = R , परिसर = $\{y : y \in$ R और $y \leq 0\}$

(iii) प्रान्त = $\{x : x \in$ R और $-3 \leq x \leq 3\}$, परिसर = $\{y : y \in$ R और $-3 \leq y \leq 3\}$

(iv) प्रान्त = R –{1, –1}, परिसर = $\{ y : y \in$ R , $y \neq 0$, $y < 0$ और $y \geq 1\}$

3.

(i)

(ii)

5. (i) आच्छादक (ii) आच्छादक (iii) अनाच्छादक (iv) अनाच्छादक

6. (i) एकैक (ii) एकैक (iii) एकैक नहीं (iv) एकैक नहीं

7. (i) एकैक नहीं (ii) एकैक नहीं (iii) एकैक

10. n(A) = 1

प्रश्नावली 2.4

1. $\{(3, 23), (4, 23), (5, 24), (6, 25)\}$

2. (i) $\{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$

(ii) $\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$

(iii) $\{(1,2), (2, 4), (3, 3), (4, 1)\}$

3. $(f \circ f)(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$

4. (i) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 6x + 1$

(ii) $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 6x - 1$

(iii) $(f \circ f)(x) = x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 15x + 5$

(iv) $(g \circ g)(x) = 4x - 9$

10. $f^{-1}(x) = \dfrac{x+7}{3}$

प्रश्नावली 2.5

1. (i) 4, 15, 6 (ii) हाँ (iii) हाँ (iv) 1 (v) 1

2. (i) नहीं (ii) हाँ (iii) नहीं (iv) हाँ

3. (i) नहीं (ii) हाँ (iii) नहीं (iv) नहीं

6. (iii) हाँ

अध्याय 2 पर विविध प्रश्नावली

1. (i) नहीं (ii) नहीं (iii) नहीं **2.** $a = 2, b = -1$

3. (i) हाँ (ii) नहीं **4.** नहीं

5. नहीं **7.** $\{3, 5, 11, 13\}$

8. सभी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय **9.** कुछ अभाज्य संख्याओं का समुच्चय

11. $\{(1,1), (2, 2), (3, 3)\}$, $\{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$, $\{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}$, $\{(1, 1), (2, 3), (3,2)\}$, $\{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$, $\{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$.

13.

14. $g(x)=\frac{x}{2}$

15. नहीं

17. $f(x)=x$ सभी $x \in A$ के लिए

18. (i) A

20. 16

प्रश्नावली 4.1

1. $\log_2 128 = 7$
2. $\log_{10} 10000 = 4$
3. $\log_3 81 = 4$
4. $\log_4 64 = 3$
5. $\log_7 49 = 2$
6. $\log_6 1 = 0$
7. $\log_{10} 0.1 = -1$
8. $\log_8 512 = 3$
9. $\log_{0.5} 0.25 = 2$
10. $\log_n m = p$
11. $\log_n c = b$
12. $\log_a c = -b$
13. $2^0 = 1$
14. $5^2 = 25$
15. $10^3 = 1000$
16. $2^{-2} = \frac{1}{4}$
17. $4^3 = 64$
18. $7^3 = 343$
19. $8^{\frac{4}{3}} = 16$
20. $5^4 = 625$
21. $9^4 = 6561$
22. $r^q = n$
23. 3
24. $\frac{5}{2}$
25. 5
26. 4
27. 1
28. $\frac{1}{3}$
29. 0

प्रश्नावली 4.2

1. 6
2. $\frac{3}{2}$
3. $\frac{2}{3}$
4. 1
5. 3
6. $-\frac{29}{6}$

14. 3
15. 5
16. $\frac{19}{7}$

प्रश्नावली 4.3

1. 5.678×10^0
2. 5.678×10^1
3. 5.678×10^2
4. 5.678×10^3
5. 5.678×10^6
6. 5.678×10^{-1}
7. 5.678×10^{-2}
8. 5×10^{-5}
9. .032
10. 1.867
11. 5280
12. 111200
13. 12321000
14. 5
15. 400
16. .012056
17. 999900
18. .00001634

प्रश्नावली 4.4

1. 3	**2.** 1	**3.** 2
4. 0	**5.** – 1	**6.** – 3
7. – 4	**8.** 2	**9.** 0
10. 2		

प्रश्नावली 4.5

1. 2.5798	**2.** 3.8941	**3.** 1.1038
4. 2.1287	**5.** 1.4958	**6.** $\bar{1}.7099$
7. $\bar{3}.0792$	**8.** $\bar{4}.1396$	**9.** $\bar{5}.1396$
10. 3.4109		

प्रश्नावली 4.6

1. 0.4771	**2.** 0. 4969	**3.** 0. 4980
4. $\bar{1}.7259$	**5.** $\bar{1}.7350$	**6.** $\bar{3}.6990$
7. $\bar{5}.7226$	**8.** 3.4529	**9.** 0.9098
10. 1.8311	**11.** 0	**12.** – 2
13. $\frac{1}{2}$	**14.** $\bar{3}.9395$	**15.** $\bar{2}.8621$
16. 20.31	**17.** 384.7	**18.** 38470
19. 0.3847	**20.** 0.04854	**21.** 0.00001199
22. 76960	**23.** 3.090	**24.** 0.001716
25. 0.1900	**26.** 0.002809	

प्रश्नावली 4.7

1. 4.299	**2.** 2.941	**3.** 22.20
4. 0.002594	**5.** 0.9018	**6.** 38450 रु.
7. $17\frac{1}{2}$ वर्ष (लगभग)	**8.** 2.4×10^5 रु. (लगभग)	**9.** 2.277×10^8
10. 7.77 प्रतिशत		

अध्याय 4 पर विविध प्रश्नावली

1. 3

2. 1.1416

3. 0.6020, 0.9030

4. 2.199

5. 254.2

6. 8341 रु., 9.48% प्रति वर्ष

7. 3.221 सेमी.

8. 1240 मी^{2}

9. 72210 रु.

10. 1.754×10^7

11. 12.48×10^7

प्रश्नावली 5.1

1. $0 + i\sqrt{16}$

2. $1 + i$

3. $-1 - i\sqrt{5}$

4. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

5. $\sqrt{x} + 0i$

6. $-b + i\sqrt{4ac}$

7. वास्तविक $z = \frac{\sqrt{17}}{2}$, काल्पनिक $z = \frac{2}{\sqrt{70}}$

8. वास्तविक $z = -\frac{1}{5}$, काल्पनिक $z = \frac{1}{5}$

9. वास्तविक $z = \sqrt{37}$, काल्पनिक $z = \sqrt{19}$

10. वास्तविक $z = \sqrt{3}$, काल्पनिक $z = \frac{\sqrt{2}}{76}$

11. वास्तविक $z = 7$, काल्पनिक $z = 0$

12. वास्तविक $z = 0$, काल्पनिक $z = 3$

13. $3 - i$

14. $3 + i$

15. $-\sqrt{5} + i\sqrt{7}$

16. $i\sqrt{5}$

17. $\frac{4}{5}$

18. $49 + \frac{i}{7}$

19. $x = \frac{3}{4},\ y = \frac{33}{4}$

20. $x = \frac{7}{2},\ y = \frac{2}{3}$

21. $x = \frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{2}+5\right)}{3},\ y = 0$

प्रश्नावली 5.2

1. 5

2. $\sqrt{34}$

3. 5

4. 2

5. $\frac{\sqrt{37}}{2}$

6. $\sqrt{3}$

7. $\frac{4}{3}$

8. 1

9. 1

10. 1

प्रश्नावली 5.3

1. $0-8i$
2. $1+0i$
3. $0+0i$
4. $0+0i$
5. $0+0i$
6. $4+0i$
7. $0+4i$
8. $-1+0i$
9. $10+0i$
10. $-4+6i$
11. $14+28\,i$
12. $2-7i$
13. $\frac{-19}{5}-\frac{21}{10}i$
14. $0+2i$
15. $\frac{17}{3}+\frac{5}{3}i$
16. $0+0i$
17. $\left(2\sqrt{3}-3\right)+0\,i$
18. $-4+0i$
19. $74+0i$
20. $0+45i$
21. $-\frac{47}{8}-\frac{13}{2}i$
22. $-\frac{22}{3}-\frac{107}{27}i$
23. $7+24\frac{\sqrt{6}}{5}i$
24. $\frac{21}{25}-\frac{47}{25}i$
25. $\frac{8}{15}-\frac{9}{15}i$
26. $\frac{72-15\sqrt{5}}{122}-\frac{\left(30+9\sqrt{5}\right)}{61}i$
27. $\sqrt{\frac{2}{3}}+0\,i$
28. $\frac{4}{25}+i\frac{3}{25}$
29. $\frac{\sqrt{5}}{14}-\frac{3i}{14}$
30. $0+i$

प्रश्नावली 5.4

1. $\left(\sqrt{2},\frac{7\pi}{4}\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$
2. $\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
3. $\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$
4. $(3, \pi)$, $3(\cos\pi + i\sin\pi)$
5. $\left(8,\frac{2\pi}{3}\right), 8\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$
6. $\left(2,\frac{\pi}{6}\right), 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
7. $\left(1,\frac{\pi}{2}\right), \left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
8. $2+i0$
9. $0-5i$
10. $2-2\sqrt{3}i$

11. $|z|=2, \arg z=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, जहां k कोई स्वेच्छ पूर्णांक है

12. $|z|=2, \arg z=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, k कोई स्वेच्छ पूर्णांक है

13. $8, 2\pi k$

14. $8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

15. $8\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

16. $18\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

17. $3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

18. $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

प्रश्नावली 5.5

1. $1-4i, -1+4i$

2. $1-3i, -1+3i$

3. $\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\mp\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i\right)$

4. $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\mp\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

5. $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

6. $\left\{\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i\right\}$

7. $(1+\sqrt{3}i); (-2+0i); (1-\sqrt{3}i)$

8. $\sqrt[6]{12}\left(\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}\right), \sqrt[6]{12}\left(\cos\frac{13\pi}{18}+i\sin\frac{13\pi}{18}\right), \sqrt[6]{12}\left(\cos\frac{25\pi}{18}+i\sin\frac{25\pi}{18}\right)$

9. $\left(\frac{1+i}{\sqrt[3]{2}}\right); \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right); \sqrt[6]{2}\left\{\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right\}$

10. $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right), \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right), \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{21\pi}{12}+i\sin\frac{21\pi}{12}\right)$

13. (i) 1 (ii) 1 (iii) 1 (iv) 1

अध्याय 5 पर विविध प्रश्नावली

1. वृत्त जिसकी त्रिज्या 1 है, केन्द्र (0, 1)

2. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

3. $4096\left(-\sqrt{3}+i\right)$

5. $z_1=\frac{1}{3}(A+B+C), z_2=\frac{1}{3}[A+B\omega^2+C\omega], z_3=\frac{1}{3}[A+B\omega+C\omega^2]$

8. शून्य, विशुद्ध काल्पनिक संख्या

प्रश्नावली 6.1

1. $x>5$	**2.** $x<5$	**3.** $x>\frac{14}{3}$	**4.** $x<2$	**5.** $x>4$
6. $x>\frac{2}{3}$	**7.** $x\le -3$	**8.** $x<\frac{-11}{2}$	**9.** $x\ge\frac{10}{7}$	**10.** $x\ge -7$
11. $x>-2$	**12.** $x>4$	**13.** $x\le -2$	**14.** $x\le -2$	**15.** $x\ge 3$
16. $x\ge -26$	**17.** $x\ge 2$	**18.** $x>4$		
19. $x\ge 8$	**20.** $x\le 120$			

प्रश्नावली 6.2

1. $2<x<6$	**2.** $9<x\le 10$	**3.** $-2<x<5$	**4.** $-5<x<5$	**5.** $1<x\le 3$
6. $-5<x\le 4$	**7.** $4<x<9$	**8.** $-1<x<3$	**9.** $x\ge 2$	**10.** $x>5$
11. $x>3$	**12.** $x>\frac{40}{11}$	**13.** $-7\le x\le 11$	**14.** $x<-3$	**15.** $x\le -6$
16. $x<-8$	**17.** $x\le -4$	**18.** $x\le 2.$		
19. हल नहीं	**20.** हल नहीं			

प्रश्नावली 6.3

प्रश्न 1 से 15 में छायाँकित क्षेत्र हल निरूपित करते हैं।

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

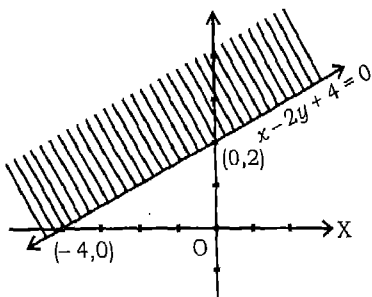
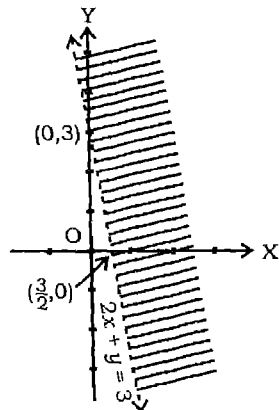
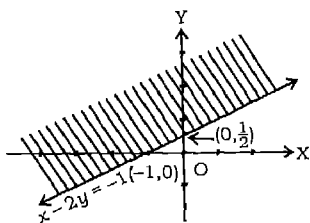
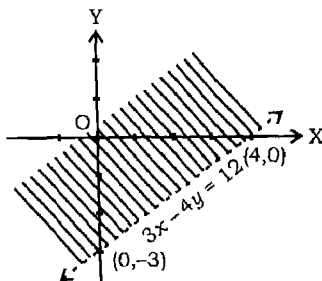
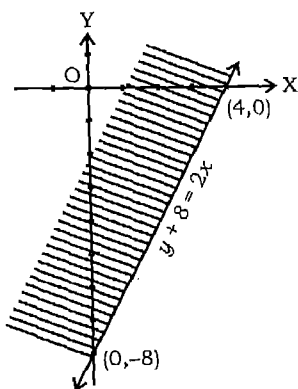
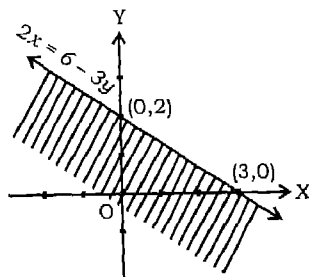
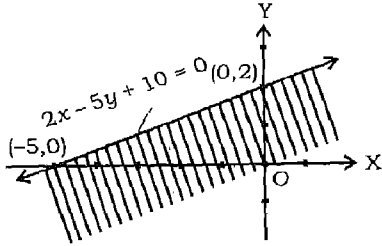
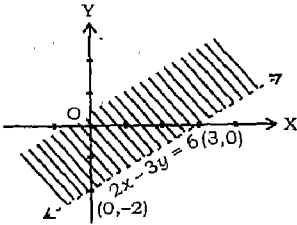
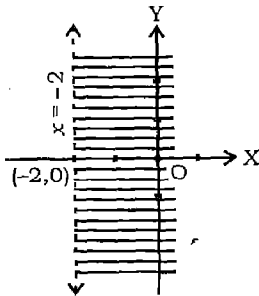
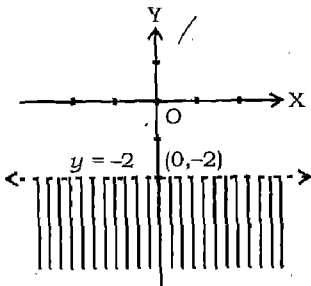
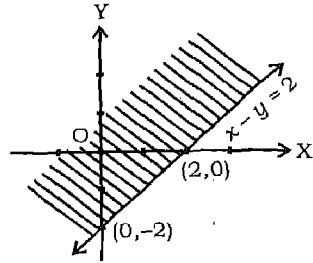
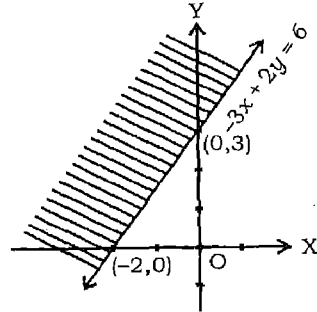
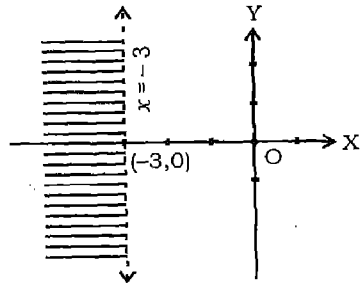
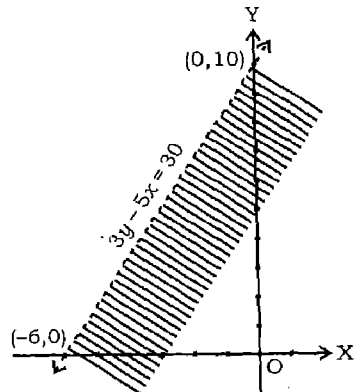
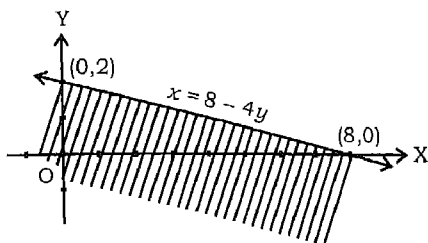
8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

प्रश्नावली 6.4

प्रश्न 1 से 15 में छायाँकित क्षेत्र (प्रश्न 10 के अतिरिक्त) हल को निरूपित करते हैं।

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

हल नहीं, क्यों कि तीन विभिन्न छायाँकित क्षेत्रों का सर्वनिष्ठ क्षेत्र नहीं है।

11.

Y
(0,15)
(0,10)
3x + 4y = 60
x + 3y = 30
O
(20,0)
(30,0)
X

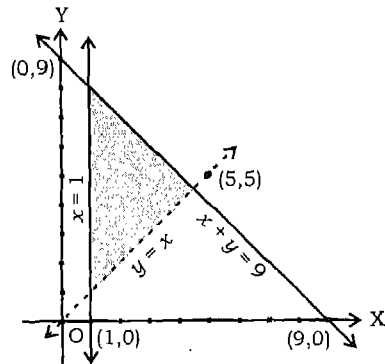
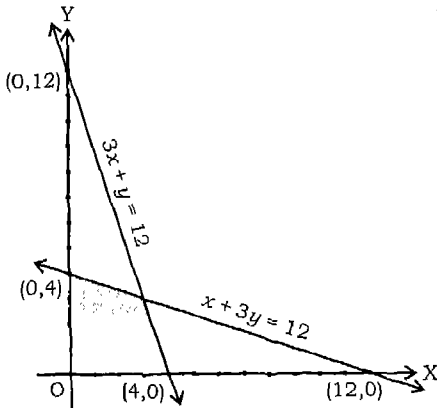
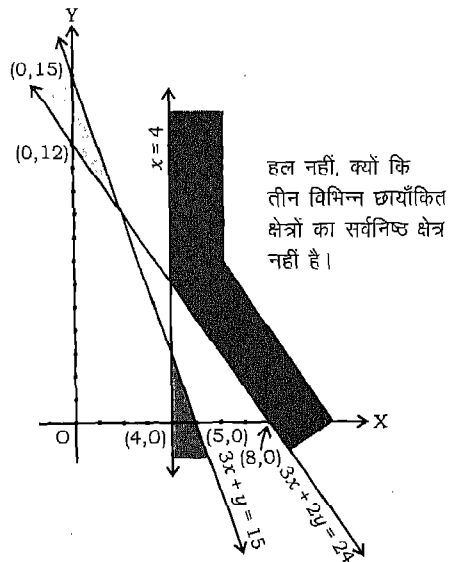
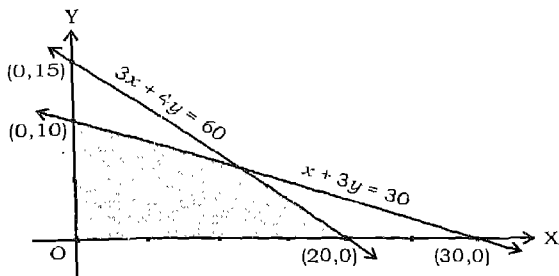
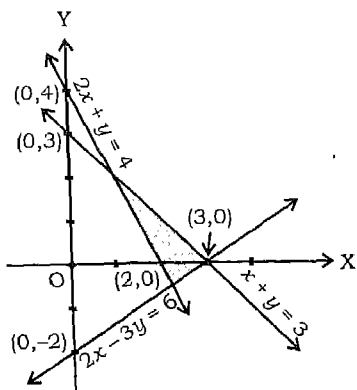
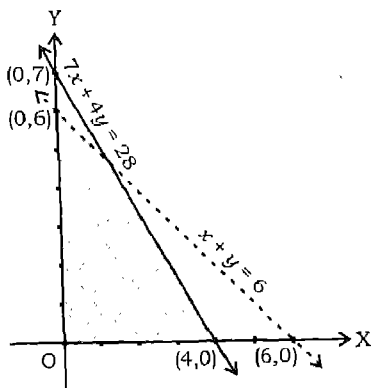
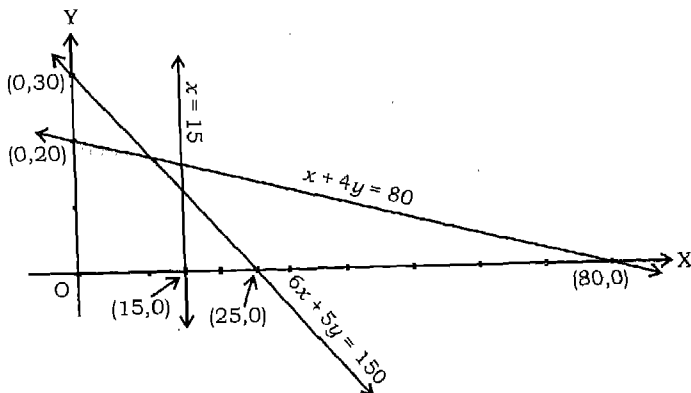
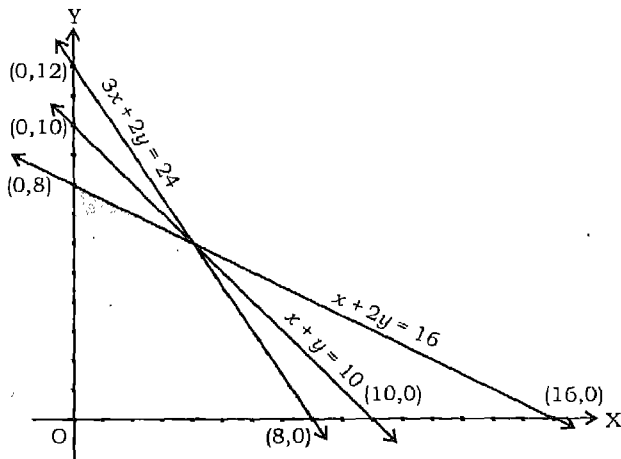
12.

Y
(0,4)
(0,3)
2x + y = 4
(3,0)
O
(2,0)
X
x + y = 3
(0,−2)
2x − 3y = 6

13.

Y
(0,7)
(0,6)
7x + 4y = 28
x + y = 6
O
(4,0)
(6,0)
X

14.

Y
(0,30)
(0,20)
x = 15
x + 4y = 80
O
(15,0)
(25,0)
6x + 5y = 150
(80,0)
X

15.

प्रश्नावली 6.5

1. 77 या अधिक

2. 35

3. (5, 7), (7, 9)

4. (6, 8), (8, 10)

5. 9 सेमी.

6. न्यूनतम 8 सेमी, परन्तु 22 सेमी से अधिक लम्बी नहीं।

7. 20°C और 25°C के मध्य

8. 320 लीटर से अधिक परन्तु 1280 लीटर से कम

9. 562.5 लीटर से अधिक परन्तु 900 लीटर से कम

10. 6.27 और 8.07 के मध्य

11. 9.8 मी और 13.8 मी के मध्य

12. न्यूनतम 9.6 परन्तु 16.8 से अधिक नहीं

13. 600 से अधिक

अध्याय 6 पर विविध प्रश्नावली

1. $-3 < x < 0$

2. $0 < x \leq 1$

3. $-2 < x \leq 1$

4. $-2 < x < 1$

5. $-2 < x < 5$

6. $\frac{-7}{3} < x \leq \frac{1}{3}$

7. $\frac{-56}{3} \leq x < \frac{14}{3}$

8. $-23 < x \leq 2$

9. $x < -2, x > \frac{3}{2}$

10. $\frac{19}{18} \leq x \leq \frac{29}{18}$

11. $2 < x < 6$

12. $x < 3$

13. $-2 < x < 5$

14. $x > -2$

15. 5 से कम

प्रश्नावली 7.1

1. $\frac{3}{5}, \frac{3}{5}$
2. $\frac{\sqrt{3} \pm 1}{2}$
3. 5, 1
4. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} i$
5. $2 \pm \sqrt{3}\, i$
6. $\frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{5}\, i}{4}$
7. $\frac{-1 \pm \sqrt{3} i}{2}$
8. $-1 \pm i$
9. $\frac{3}{5} \pm \frac{\sqrt{2}}{5} i$
10. $\frac{3}{5} \pm \frac{1}{5} i$
11. $\frac{7 \pm \sqrt{11}\, i}{6}$
12. $\frac{7 \pm \sqrt{3}\, i}{26}$
13. $\frac{-5}{9} \pm \frac{\sqrt{2}}{9} i$
14. $\frac{-9}{16} \pm \frac{\sqrt{15}}{16} i$
15. $\frac{14}{17} \pm \frac{2\sqrt{2}}{17} i$
16. $\frac{-9 \pm \sqrt{3}\, i}{42}$
17. $\frac{4}{17} \pm \frac{1}{17} i$
18. $\frac{29}{42} \pm \frac{\sqrt{83}}{42} i$
19. $\frac{-14}{21} \pm \frac{\sqrt{14}}{21} i$
20. $\frac{-5}{27} \pm \frac{\sqrt{2}}{27} i$
21. $3\sqrt{2}, -2i$
22. $-2i, -2i$

प्रश्नावली 7.2

1. (i) $S = \frac{3}{2}$, $P = \frac{5}{2}$ (ii) $S = \frac{m}{3k-1}$, $P = \frac{a-b}{3k-1}$
   (iii) $S = 7$, $P = 1$ (iv) $S = -k$, $P = -k^2$
2. (i) $4x^2 - 12x + 7 = 0$ (ii) $x^2 - 9ix - 14 = 0$
   (iii) $16x^2 + 1 = 0$ (iv) $x^2 - (5-i)x + (18+i) = 0$
   (v) $2x^2 - (3+7i)x - (3-9i) = 0$ (vi) $x^2 - (2+i)x - (1-7i) = 0$
3. $\frac{256}{9}$
4. 4
5. (i) $\frac{2}{3}$ (ii) 2 (iii) $\frac{2}{3}$ (iv) 2 (v) [illegible]

6. $2, -25$

7. $\frac{9}{8}$

9. 3

10. $2, \frac{-25}{2}$

11. $x^2 - 7x + 12 = 0$

12. $x^2 + npx + n^2q = 0$

प्रश्नावली 7.3

1. (i) $\frac{73}{9}$ (ii) $\frac{485}{27}$ (iii) $\frac{-5}{8}$ (iv) $\frac{73}{64}$ (v) $\frac{-40}{9}$

2. (i) $\frac{-1}{2}$ (ii) -3

3. (i) $p^4 + 2q^2 - 4p^2q$ (ii) $3pq - p^3$

4. (i) $\frac{q^2 - 2r}{r^2}$ (ii) $\frac{q^3 - 3qr}{r^3}$

5. (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{7}{2}$

6. (i) $x^2 - 4x + 3 = 0$ (ii) $9x^2 - 10x + 1 = 0$ (iii) $x^2 - 4x + 3 = 0$

7. (i) $4ax^2 + 2bx + c = 0$ (ii) $cx^2 + bx + a = 0;\ c \neq 0$

8. (i) $x^2 - (p^2 - 2q)x + q^2 = 0$ (ii) $qx^2 + p(1+q)x + (q+1)^2 = 0,\ q \neq 0$

9. $x^2 - 6x + 11 = 0$

10. $2x^2 - 25x + 82 = 0$

11. $qx^2 - px + 1 = 0,\ q \neq 0$

12. $x^2 - 3x - 4 = 0$

13. (i) $\frac{b^2 - 2ac}{c^2},\ c \neq 0$ (ii) $\left(\frac{b^2 - 2ac}{ac}\right)^2,\ a, c \neq 0$

14. $pqx^2 + (p+q)^2 = 0;\ p, q \neq 0$

15. $\sqrt{pr}\,x^2 + qx + \sqrt{pr} = 0,\ p, r \neq 0$

प्रश्नावली 7.4

1. $1, -8$
2. $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$
3. $\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}, \frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$
4. $1, 2, \frac{1}{2}$
5. $0, 3, \frac{3\pm i\sqrt{11}}{2}$
6. $2, 3$
7. $1, -1$
8. -2
9. $1, 1, \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$
10. $\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$ (दो बार आया है)
11. $0, 4$
12. $\frac{4}{13}, \frac{9}{13}$
13. $\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$
14. $\pm a$
15. 4
16. $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}, \frac{-3\pm i\sqrt{3}}{2}$
17. $\frac{9}{2}$
18. $2, \frac{-1}{2}, \frac{5\pm\sqrt{41}}{4}$

प्रश्नावली 7.5

1. 3
2. $1+\sqrt{2}$
3. 1
4. $\frac{\sqrt{33}-1}{2}$
5. 16
6. $1, 17 ; 17, 1$
7. $3, 1 ; 1, 3 ; 2\pm5i ; 2\mp5i$
8. $4, 1 ; 1, 4 ; \frac{5\pm\sqrt{159}}{2}i ; \frac{5\mp\sqrt{159}}{2}i$
9. 10 m
10. $100(\sqrt{2}-1)$

अध्याय 7 पर विविध प्रश्नावली

2. $x^2-2qx+q^2-p^2=0$
8. $acx^2-bx+1=0, \; ac\neq 0$
10. $\frac{a-b}{a+b}, a+b\neq 0$
11. $9ax^2+3bx+c=0$
12. $ax^2+nbx+n^2c=0$
14. $37p^2=1444q$

प्रश्नावली 8.1

1. 7, 9, 11, 13 और 15

2. $\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}, 0, \frac{1}{4}$ और $\frac{1}{2}$

3. 2, 4, 8, 16 और 32

4. $\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}$ और $\frac{7}{6}$

5. 25, –125, 625, –3125 और 15625

6. $\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{21}{2}, 21$ और $\frac{75}{2}$

7. 57, 89

8. $\frac{25}{32}$

9. 343

10. 0, 0 और –12

11. 3, 5, 7, 9, 11

12. $\frac{-1}{2}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{24}, \frac{-1}{120}$ और $\frac{-1}{720}$

13. 1, 0, –1, –2, –3

14. 1, 2, $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ और $\frac{8}{5}$

प्रश्नावली 8.2

1. (i) $d = -3; -12, -15, -18, -21$

(ii) $d = \frac{5}{4}, \frac{11}{4}, 4, \frac{21}{4}, \frac{13}{2}$

(iii) $d = -2y; x - 5y, x-7y, x-9y, x-11y$

(iv) $d = \frac{1}{6}; \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, \frac{7}{6}$

2. (i) –100

(ii) $n - m$

(iii) 21; $2n+1$

(iv) $\frac{173}{15}; \frac{2n}{3} - \frac{7}{15}$

3. 14

4. $-8; 5r-18$

6. $7q-6p; 4p-3q + (q-p)n$

7. 10वाँ

8. 3

10. 1

12. 21, 23 और 25

13. 5, 7, 9 या 9, 7, 5

प्रश्नावली 8.3

1. -897 2. -27.5 3. 3969
4. $22(x-20y)$ 5. 10100 6. 98450
7. 2310 8. 5 or 20 10. 19
11. 0 12. 1150 13. 4 or 8
17. 1 18. $6, 9, 12, 15, 18, 21$ 19. 14

प्रश्नावली 8.4

1. $5^{10}, 5^n$ 2. 3072 4. -2187
5. (a) 9 वाँ पद (b) 12 वाँ पद (c) 9 वाँ पद
6. ± 1 7. $3\left[1-\frac{2^{10}}{3^{10}}\right]$ 8. $\frac{1}{6}\left[1-(0.1)^{20}\right]$
9. $\frac{\sqrt{7}}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(3^{\frac{n}{2}}-1\right)$ 10. $\frac{\left[1-(-a)^n\right]}{1+a}$ 11. $\frac{x^3\left(1-x^{2n}\right)}{\left(1-x^2\right)}$
12. $\frac{8}{5}\left(1-\frac{1}{4^{12}}\right)$ 13. $22+\frac{3}{2}\left(3^{11}-1\right)$ 14. $\frac{4}{3},-1,\frac{3}{4}$ or $\frac{3}{4},-1,\frac{4}{3}$
15. 10 16. $\frac{16}{7};2;\frac{16}{7}\left(2^n-1\right)$ 17. 2059
18. $\frac{-4}{3},\frac{-8}{3},\frac{-16}{3},\ldots$ 20. $\frac{7}{9}\left[\frac{10}{9}\left(10^n-1\right)-n\right]$ 21. $3, -6, 12, -24$

या $4, -8, 16, -32, 64, \ldots$

26. $4, 16, 64$ 27. $n=\frac{-1}{2}$

प्रश्नावली 8.5

1. 1.5 2. 7.5 3. $\frac{1000}{3}$
4. $.75$ 5. $\frac{100}{19}$ 6. $\frac{31}{45}$

7. $\frac{114}{99}$

8. $\frac{712}{999}$

9. $\frac{2}{3}$

10. 16

11. $\frac{\left(4+3\sqrt{2}\right)}{2}$

13. $5+\frac{10}{3}+\frac{20}{9}+\ldots$

14. $10+5+\frac{5}{2}+\frac{5}{4}+\frac{5}{8}+\ldots$

15. $\frac{13}{24}$

प्रश्नावली 8.6

1. $\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{3n}{2}\times\frac{1}{3^n}$

2. $4+\frac{8}{9}\left(1-\frac{1}{4^{n-1}}\right)-\frac{(2n+1)}{3\times4^{n-1}}$

3. $\left[\frac{1}{(1-x)}+\frac{2x\left(1-x^{n-1}\right)}{(1-x)^2}-\frac{(2n-1)x^n}{(1-x)}\right]$

4. $\left[\frac{1}{(1-x)}+\frac{3x\left(1-x^{n-1}\right)}{(1-x)^2}-\frac{(3n-2)x^n}{(1-x)}\right]$

5. $\frac{44}{9}, \frac{1+x}{(1-x)^2}, \frac{1+2x}{(1-x)^2}$

6. $\frac{1}{4}$ या $\frac{17}{11}$

7. 2

प्रश्नावली 8.7

1. $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

2. $\frac{n}{6}(n+1)(3n^2+5n+1)$

3. $\frac{n}{(n+1)}$

4. 2840

5. $3n(n+1)(n+3)$

6. $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$

7. $\frac{n}{3}(n+1)(n+5)$

8. $\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)+2(2^n-1)$

प्रश्नावली 8.8

1. $\frac{6}{5}, 1, \frac{6}{7}, \frac{3}{4}, \ldots$

5. 2,6

प्रश्नावली 8.9

1. 16680 रु.
2. 39100 रु.
3. 16
4. 43690 रु.
6. 17000 रु.; 295000 रु.
7. $500\,(1.1)^{10}$ रु.
8. 120; 480; $30(2^n)$

अध्याय 8 पर विविध प्रश्नावली

1. 14
2. 12
4. 5, 8, 11
6. 8729
7. 6
8. 160; 6
9. ± 3
10. 8,16,32
13. 5120 रु.
21. $\frac{7}{81}(4490+10^{-49})$
22. (i) $\frac{50}{81}(10^n-1)-\frac{5n}{9}$ (ii) $\frac{2n}{3}-\frac{2}{27}(1-10^{-n})$
23. $\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{xy}{1-xy}$
24. 512 वर्ग सेमी
25. 144 सेमी
27. 6
28. $\frac{n}{3}(n^2+3n+5)$
29. $\frac{n}{24}(2n^2+9n+13)$
30. कभी नहीं

प्रश्नावली 9.1

1. (i) $\frac{\pi}{12}$ (ii) $-\frac{5\pi}{24}$ (iii) $\frac{4\pi}{3}$ (iv) $\frac{53\pi}{18}$
2. (i) $42^\circ\, 57'\, 17''$ (ii) $-229^\circ\, 5'\, 27''$ (iii) 300° (iv) 210°

3. 12π **4.** $12° 36'$ **5.** $\frac{20\pi}{3}$ सेमी **6.** $5:4$

7. (i) $\frac{2}{15}$ (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\frac{7}{25}$

प्रश्नावली 9.2

1. $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{cosec}\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sec\theta = -2$, $\tan\theta = \sqrt{3}$, $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

2. $\operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{3}$, $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\sec\theta = -\frac{5}{4}$, $\tan\theta = -\frac{3}{4}$, $\cot\theta = -\frac{4}{3}$

3. $\sin\theta = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{cosec}\theta = -\frac{5}{4}$, $\cos\theta = -\frac{3}{5}$, $\sec\theta = -\frac{5}{3}$, $\cot\theta = \frac{3}{4}$

4. $\sin\theta = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{cosec}\theta = -\frac{13}{12}$, $\cos\theta = \frac{5}{13}$, $\tan\theta = -\frac{12}{5}$, $\cot\theta = -\frac{5}{12}$

5. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **6.** 2 **7.** $\sqrt{3}$ **8.** 1

प्रश्नावली 9.3

16. (i) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (iii) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iv) 1

17. $\frac{2}{11}$

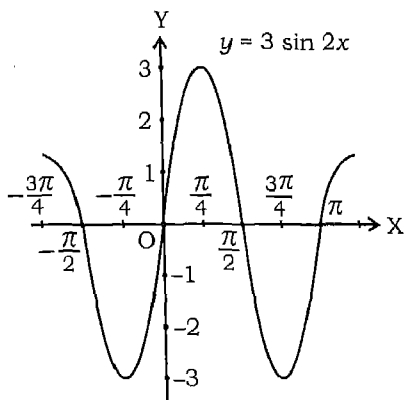
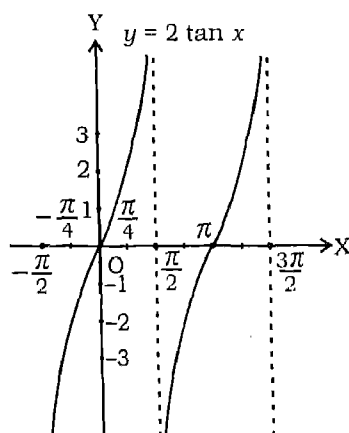
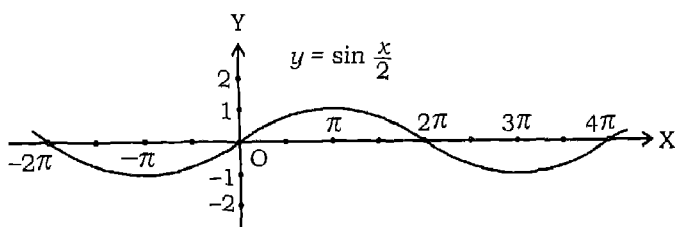
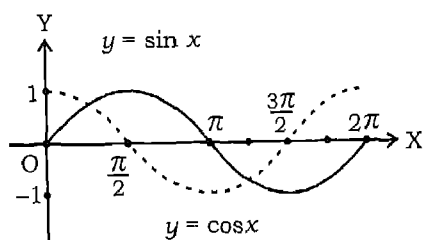
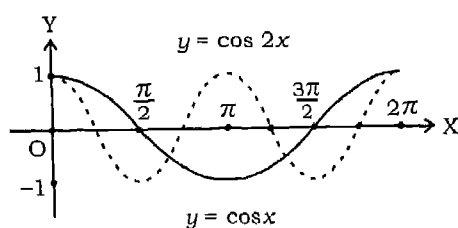
प्रश्नावली 9.4

26. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 2

27. $\frac{\sqrt{6}}{3}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $-\sqrt{2}$

28. $\frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}$, $\frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}$, $4+\sqrt{15}$

प्रश्नावली 9.6

1.

2.

3.

4.

5.

प्रश्नावली 9.7

1. (i) 0.9387 (ii) 0.7431 (iii) 1.402 (iv) 1.501
2. (i) 32° 30′ (ii) 89° 30′ (iii) 88° 20′ (iv) 18° 20′
3. (i) 0.5645 (ii) 0.4295 (iii) 0.9037 (iv) 0.9512

प्रश्नावली 10.1

3. (i) मूल बिन्दु से 2 इकाई ऊपर x-अक्ष के समान्तर रेखा पर स्थित है।
   (ii) मूल बिन्दु से 3 इकाई बाएँ y-अक्ष के समान्तर रेखा पर स्थित है।
4. (2,3)
5. $(\sqrt{3}\,a, 0)$, $(0, a)$, $(0, -a)$.

प्रश्नावली 10.2

1. (i) $2\sqrt{13}$ (ii) 5 (iii) 5 (iv) 13
3. नहीं
4. $2\,a \sin \dfrac{\alpha-\beta}{2}$
5. $\sqrt{2}\,|\sin\theta - \cos\theta|$
6. $2\sqrt{x^2+y^2}$
7. (–1,0)
8. संगामी
9. संगामी
10. संगामी
15. –1 or 3
16. (0, –2)
17. $x - y = 3$

प्रश्नावली 10.3

1. (0,0)
2. (4, 0)
3. $(\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$
4. $(\frac{7}{3}, -2)$
5. $(-\frac{4}{5}, \frac{13}{5})$
6. (14, 3)
7. (32,12)
8. (11,12)
9. (8,21)
10. (i) 1:2 अन्तत: (ii) 2:5 वाहयत:
11. 1:3
12. (1, 3)
13. (2, 1)
14. (2, 2)
15. (4, 5)
16. (0, –1)

प्रश्नावली 10.4

1. $\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई
2. 18 वर्ग इकाई
3. 37.5 वर्ग इकाई

4. 28.5 वर्ग इकाई

8. 1

9. 2 or –1/2

10. $5x - 4y + 1 = 0$

11. $x = 5$

12. (7 , 2) or (1 , 0)

13. $-\frac{3}{8}, \frac{11}{8}$

14. 15 वर्ग इकाई

15. $|a\,b|$ वर्ग इकाई

16. 1.5 वर्ग इकाई

प्रश्नावली 10.5

1. (i) झुकाव न्यूनकोण है (ii) रेखा संपाती है, या x-अक्ष के समान्तर है
   (iii) झुकाव अधिक कोण है (iv) 90°

2. (i) $\sqrt{3}$ (ii) 1 (iii) अपरिभाषित (iv) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. (i) 45° (ii) $\tan^{-1}\frac{1}{4}$ (iii) $\tan^{-1}3$ (iv) 0°

4. (i) 0 (ii) –1 (iii) $-\frac{1}{6}$

6. समान्तर

7. न तो समान्तर और न लम्ब

8. लम्ब

9. समान्तर

10. 1

11. $y = 9$

प्रश्नावली 10. 6

1. $5x + 3y - 9 = 0$

2. $x^2 - 8x - 4y + 20 = 0$

3. $y = 3x$

4. $y = x + d$

5. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$

6. $2x - 3y = 0$

7. $y = x$

8. $x^2 + y^2 = p^2$

9. $3x^2 + 3y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$

10. $y^4 - 4y^2 - 4x^2 = 0$

अध्याय 10 पर विविध प्रश्नावली

1. $\sqrt{10}$

2. $\cot^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

3. (7, 1) और (–8, 7)

4. $(\frac{19}{2}, \frac{13}{2})$ और $(-\frac{9}{2}, -\frac{15}{2})$

5. (1, 3), (5, 5), (3, –3)   6. $(\frac{10}{3}, 6)$

7. (1,0)   8. $(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 10. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ और $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

प्रश्नावली 11.1

1. $y = 2$ 2. $x = 3$ 3. $y + 4 = 0$ 4. $y + 2 = 0$
5. $y - 2 = 0$ 6. $x = 0$ 7. $x = -1$

प्रश्नावली 11.2

1. $4x - y + 6 = 0$ 2. $x - 2y + 10 = 0$ 3. $2x - 3y + 4\sqrt{2} = 0$
4. $x - y = 0$ 5. $2x + y + 6 = 0$ 6. $x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0$
7. $5x + 3y + 2 = 0$ 8. $3x - 5y = 15$ 9. $x - y - 1 = 0$
10. $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$, $\sqrt{3}x + y - 2 = 0$ और $\sqrt{3}x - y - 2 = 0$, $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$
11. $x + 2y - 4 = 0$, $x - 3y + 11 = 0$, $2x - y - 3 = 0$
12. $x + 3y - 6 = 0$ 13. $5x - y + 20 = 0$ 14. $x - 2y - 10 = 0$
15. $x + 2y - 6 = 0$, $2x + y - 6 = 0$
16. $x = 2$, $6x - 7y + 79 = 0$, $6x + 7y + 65 = 0$
18. $x + y = 3\sqrt{2}$ 19. $\sqrt{3}x + y = 10$ 20. $y - x = 5\sqrt{2}$
21. $y = 1$ 22. $y - 1 = x + 2$

प्रश्नावली 11.3

1. $y = -x + \frac{5}{3}$ 2. $y = -\frac{7}{3}x + 2$ 3. $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$
4. $y = -2x + \frac{5}{3}$ 5. $y = -\frac{1}{7}x$ 6. $y = 0x + 0$
7. $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$; $\sqrt{2}$ 8. $\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y = \frac{9}{5}$; $\frac{9}{5}$
9. $x = 4$; 4   10. $y = 2$; 2

प्रश्नावली 11.4

1. $(\frac{30}{13}, \frac{6}{13})$
2. $(0,3)$
3. $(\frac{18}{17}, \frac{24}{17})$
4. $(\frac{72}{21}, \frac{113}{21})$
5. $(-\frac{1}{13}, \frac{18}{13})$
6. $(-\frac{1}{3}, 3)$
7. $(\frac{68}{25}, \frac{-49}{25})$
8. $(-2, 3)$
10. $(-4, -3)$

प्रश्नावली 11.5

1. 30° or 150°
2. $\pm\frac{p^2-q^2}{2pq}$
3. समकोण त्रिभुज
4. -3 या $\frac{1}{3}$
5. $\tan^{-1}(-\frac{53}{5})$
6. $\frac{22}{9}$
7. $4x-7y+19=0$ और $7x+4y-48=0$
8. $\tan^{-1}\frac{22}{3}$

प्रश्नावली 11.6

1. $\frac{2}{5}$ इकाई
2. $\frac{34}{13}$ इकाई
3. $\frac{66}{13}$ इकाई
4. $\frac{a^2-b^2+ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ इकाई
5. $\frac{14}{\sqrt{34}}$ इकाई
6. $\frac{34}{\sqrt{29}}, \frac{17}{\sqrt{10}}, \frac{34}{\sqrt{73}}$ इकाई
7. 3 इकाई
8. $\frac{65}{17}$ इकाई
9. $|c-d|$ इकाई
10. $\cos\frac{(\theta-\phi)}{2}$
11. $(0, -9), (0, 1)$

प्रश्नावली 11.7

1. $x-y-5=0, 3x+3y+1=0$
2. $x+7y-10=0, 7x-y+14=0$

3. $21x - 77y - 9 = 0, 99x + 27y + 329 = 0$

4. $y = 2, x = 6$

5. $27x - 21y + 140 = 0, 77x + 99y - 270 = 0$

7. $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{34})x + (5\sqrt{5} - \sqrt{34})y - 15\sqrt{5} + 6\sqrt{34} = 0,$

$(3 - \sqrt{17})x + (5 - \sqrt{17})y = 15 - 4\sqrt{17}$

और $(2\sqrt{2} - \sqrt{5})x + (\sqrt{2} - \sqrt{5})y - 6\sqrt{2} + 4\sqrt{5} = 0$

8. $112x - 64y + 141 = 0, x - 7y + 18 = 0$ और $33x + 9y - 31 = 0$

9. $x = 0$ और $y = b - \dfrac{2mb}{1-m^2}$

10. $x + 7y - 1 = 0, 7x - y + 11 = 0$

प्रश्नावली 11.8

1. $2x - 3y + 12 = 0$

2. $5x - 3y - 9 = 0$

3. (i) $x + 2 = 0$ (ii) $x + y + 3 = 0$

4. $3x + y - 10 = 0$

5. $ax - by + b^2 = 0$

7. (i) $2x + 29y = 0$ (ii) $13x - 19y - 83 = 0$ (iii) $x + 12y - 1 = 0$ (iv) $3x - 29y - 29 = 0$

8. (i) $42x + 21y - 257 = 0$ (ii) $21y - 113 = 0$ (iii) $7x - 24 = 0$ (iv) $63x + 105y - 781 = 0$

9. $15x + 12y - 7 = 0$

10. $10x + 93y + 40 = 0$

11. $13(x + y) - 6 = 0$

प्रश्नावली 11.9

1. (i) (4, 3) (ii) (3, 3) (iii) (8, 2) (iv) (2, 0) (v) (6,–3) (vi) (1, 3)

2. (i) $x^2 - 3y^2 + xy + 3x - 6y + 1 = 0$
(ii) $xy - y^2 = 0$
(iii) $xy = 0$
(iv) $x^2 - y^2 = 0$

3. (i) (2,4) (ii) $\left(\frac{5}{2}, -1\right)$ (iii) सभी वास्तविक संख्याओं k के लिए $(6, k)$

अध्याय 11 पर विविध प्रश्नावली

1. $c = -4$, $(2, 0)$ और $(4, 4)$

2. $x - y = 0$

3. $4x + 7y - 11 = 0$, $7x - 4y - 3 = 0$, $7x - 4y + 25 = 0$

5. $3x - y = 7$, $x + 3y = 9$

6. $x + 2y = 2a$, $3x - 4y + 4a = 0$, $\frac{5}{2}a^2$ वर्ग इकाई

7. $107x - 3y - 92 = 0$

9. $x(\cos\alpha - \sin\alpha) + y(\sin\alpha + \cos\alpha) = 4$, $x(\sin\alpha + \cos\alpha) - y(\cos\alpha - \sin\alpha) = 0$

10. 5

11. k^2 वर्ग इकाई

struct others in operating it. An instructor following the procedures here discussed will consult such a committee if it exists in her institution. If it does not, she may be the one to initiate its organization. In any case, she will consult individuals able to provide expert assistance when she has the opportunity and responsibility of purchasing equipment.

Sources

In this rapidly developing field new and valuable materials are constantly being made available. The instructor must find out what is relevant to her use, secure it if possible, and review it in advance of using it with students. This means a continual searching of catalogues and listings. Such an undertaking may well seem formidable. It is helpful to classify agencies and then give major attention to the publications of those providing information, rental, and borrowing services in a given locality. There are four main sources for finding out about and procuring audio-visual materials. These are governmental agencies, educational agencies, welfare and public-service agencies, and commercial dealers.

GOVERNMENTAL AGENCIES

Federal Departments and Agencies provide both information and materials. The following publications should be consulted:

Current Releases of Non-theatrical Films, and from time to time similar publications, U. S. Department of Commerce, Motion Picture Division, Washington, D. C.

Sources of Visual Aids for Instructional Use in Schools, rev. ed. *Directory of United States Government Films,* U. S. Office of

Education, Washington, D. C. This agency also publishes suggestions for the use of visual aids in the schools.

A Catalogue of Government Films, Business Screen, 157 East Erie Street, Chicago 11, Ill.

Motion Pictures of the U. S. Department of Agriculture, Extension Service, U. S. Department of Agriculture, Washington, D. C.

Slide Films of the U. S. Department of Agriculture, Extension Service, U. S. Department of Agriculture, Washington, D. C.

State departments of education in most instances maintain a rental library of films for use in the schools and publish listings of these materials. Information can be obtained by writing the State Department of Education of the instructor's particular state.

EDUCATIONAL AGENCIES

Colleges and universities are frequently excellent sources for audio-visual materials. In most states, some one or more of the institutions of higher learning maintain a film service. Information about the nature and scope of that service can be obtained by writing to the particular institution. If in doubt as to the institution, write the State Department of Education for information.

For example, Ohio State University has been a center for such aids over a period of years. *The News Letter* published monthly by the Bureau of Educational Research, Ohio State University, is edited by Edgar Dale and is of very great value to teachers. See the April, 1946, number for a current and comprehensive discussion of Sources of Teaching Materials. In this issue is listed references on Utilization, Basic Sources, Radio Program Listings, Educational Recordings, Free and Inexpensive Teaching Aids and under the

heading, Keeping Currently Informed, are listed associations, periodicals, and service bulletins.

School systems collect libraries of audio-visual materials and issue listings from time to time for use of their teachers.

Educational associations show a growing interest in this field. The following should not be overlooked in a survey of sources:

American Council on Education, 744 Jackson Place, Washington, D. C, publishes a number of pamphlets, among which are *School Use of Motion Pictures; Films on War and American Policy, Projecting Motion Pictures in the Classroom.*

American Library Association, 520 North Michigan Avenue, Chicago, Ill., publishes a *News Letter on Visual Materials.*

National Education Association, 1201 16th Street, Washington, D. C., publishes a number of pamphlets and monographs in visual aids.

WELFARE AND PUBLIC-SERVICE AGENCIES

This group includes museums, libraries, youth organizations, health and social-service agencies and organizations of many kinds both national and local in scope. Noteworthy among museums as sources for audio-visual aids are American Museum of Natural History, 79th Street and Central Park West, New York 24, N. Y., and the Museum of Modern Art, 11 West 53d Street, New York 19, N. Y. With the exception of museums and libraries, the agencies in this group are sources for materials on subjects pertaining to the purposes for which each one is organized and operates. Listings may be found in the directory published by the U. S. Office of Education, previously referred to on page 418.

COMMERCIAL DEALERS

There is a large and growing number in this group publishing catalogues and supplying materials. Consult the following:

Brandon Films, Inc., 1600 Broadway, New York 19, N. Y.

Bell and Howell Company, 1801 Larchmont Avenue, Chicago, Ill., maintains a library of films and a directory of film sources.

Coronet Instructional Films, Glenview, Ill.

Encyclopaedia Britannica Films, Inc., 20 North Wacker Drive, Chicago, Ill.

Film Daily Publishing Company, 1501 Broadway, New York, N. Y., publishes *Film Yearbook,* an encyclopedia on motion pictures.

Film Information Service, 502 Hearst Tower Building, Baltimore, Md., serves as clearinghouse for visual-aids information.

Victor Animatograph Corporation, Davenport, Ia., issues a number of publications, such as *Directory of Film Services.*

Vocational Guidance Films, Inc., 2708 Beaver Avenue, Des Moines 10, Ia.

H. W. Wilson Company, 950 University Avenue, New York, N. Y., maintains the *Educational Film Catalogue,* an annual directory of film sources.

Young America Films, Inc., 18 West 41st Street, New York, N. Y.

Y.M.C.A. Motion Picture Bureau, 347 Madison Ave., New York 17, N. Y.

Some of the current or periodical publications of commercial firms are valuable sources of information to the teacher. See:

Educational Screen, a magazine published by Educational Screen, Inc., 64 Lake Street, Chicago, Ill. This firm also publishes

a directory called *1,000 and One, The Blue Book of Non-theatrical Films.*

Business Screen, 157 East Erie Street, Chicago 11, Ill.
See and Hear, 157 East Erie Street, Chicago 11, Ill.
Film and Radio Guide, 172 Renner Avenue, Newark, N. J.

Examples of Available Materials

There is as yet a paucity of audio-visual material specifically developed for use in studying methods of guiding young people. There is a large amount of material pertaining to what we may call the subject matter of guidance—the problems of living. An instructor has to search this material for aids pertinent to the needs of a specific group. In naming examples, it is not presumed that all instructors will find them useful. They are presented only to illustrate the kinds of materials that might be valuable in connection with studying this book.

For possible use in developing understanding of intergroup problems there are films available in the Human Relations Series, New York University Film Library; films developed by the National Conference of Christians and Jews, such as *The World We Want to Live In* and *The Greater Victory;* films of the Office of War Information such as *The Negro Soldier, Challenge to Democracy* (showing the experiences of Japanese Americans during the war), *A Better Tomorrow* (showing the process of modern education); the March of Time Films, such as *Americans All,* which stresses the problem of preventing racial and religious intolerance, *Youth in Crisis,* which shows the problems of youth as a result of the war and stresses community programs to meet youth problems, and *Progressive Education,* which shows a progressive school system at work.

The *Sixteenth Yearbook* of the National Council for the Social Studies, *Democratic Human Relations*, lists in Chapter X "Materials and Sources," materials of use in relation to Chapters Three, Five and Nine of this book. Among these are the fifteen 18- by 20-inch posters on the Races of Mankind which can be purchased from the Race Relations Division of the American Missionary Association, 287 Fourth Avenue, New York, N. Y. The Council Against Intolerance in America, 17 East 42d Street, New York, N. Y., can supply a factual photographic exhibit, *The Negro in American Life,* consisting of twenty-six large placards with photographs and text illustrating Negro history and contemporary life. A parallel exhibit from the same source is entitled *The Jew in American Life.*

Other posters on the Negro and Negro art may be bought or rented from the Harmon Foundation, 140 Nassau Street, New York, N. Y. Photographs of Japanese Americans at home, at work, at school, as soldiers, and in relocation centers, prepared by the War Relocation Authority, may be borrowed for transportation costs from the Bureau of Intercultural Education, 1697 Broadway, New York, N. Y. Effective exhibit material can be prepared from Ansel Adams's book of photographs of Japanese Americans, *Born Free and Equal,* and from Wallace Stegner's *One Nation,* prepared in collaboration with the editors of *Look* magazine.

The United States Government has had made several documentary films, which it was anticipated would be the first in a series depicting American life and history. Under Pare Lorenz, in the Department of Agriculture, *The River* and *The Plow that Broke the Plains* were produced. *The City* is another of these excellent films. The war terminated the project, but copies of the pictures made are obtainable. For information write the U. S. Office of Agriculture, Wash-

ington, D. C., or your local film library or film distributor.

Numerous films are available in the area of health. The following are illustrative of these aids. To procure these films consult the listings of distributors in a given locality.

In the Beginning

Reproduction explained through use of photomicrography and diagrams. Particularly suited to high-school teaching.

Let My People Live

Story of tuberculosis in a Negro family, starring Rex Ingram, with spirituals sung by the Tuskegee Institute Choir.

Magic Bullets

A dramatic film depicting the discovery by Dr. Paul Ehrlich of a cure for syphilis after years of painstaking work. Condensed from Warner Brothers' 11-reel film, starring Edward G. Robinson.

Message to Women

A color film for girls and women, in which the doctor explains the problems concerning venereal disease to leadership groups of women. Information presented with animated diagrams and positive appeal for strengthening wholesome influences in community life.

There are also filmstrips of value in discussing health subjects. One of these of particular interest in connection with this book is *Teacher Observation of School Children* made by the Metropolitan Life Insurance Company, 1 Madison Avenue, New York, N. Y. These pictures are designed to aid teachers in observing symptoms of good health and signs of illness.

The University of Iowa Child Welfare Research Station has produced a number of films based on the work of Lewin and his associates analyzing the interaction of individual-

and-environment. The films of value in studying the field theory of behavior and learning are *Child and Field Forces, Experimental Studies in the Social Climate of Groups, Field Forces, Growth in Self-reliance, Level of Aspiration in Young Children, Life of a Healthy Child, Various Conflict Situations.*

The Vassar Summer Institute for Family and Community Living recently issued a film on parent-child relationships based on the needs of the child. Other Vassar College films of interest are *Frustration Play Techniques* and *This Is Robert,* dealing with personality development and adjustment. Other films on the important subject of home and family relationships are *And So They Live* produced by the University of Kentucky; *A Family Affair,* produced by the University of Iowa; *As the Twig Is Bent,* made by the Aetna Life Insurance Company; *Guidance Problem for Home and School,* produced by the Guidance Clinic, Teachers College, Columbia University.

Pepsi-Cola Junior Clubs, New York, has a 12-minute film called *Teen Age Time,* which shows a group of adolescents planning and carrying out their own activities. Juvenile delinquency is the subject of *Boy in Court,* put out by the National Probation Association; *Challenge to Crime,* produced by the Young Men's Christian Association; *Juvenile Delinquency,* one of the March of Time films; *A Criminal Is Born,* made by Leslie Fenton. The addresses of distributors may be found in the previously listed general catalogues.

The following films are of value in connection with studying teaching techniques: *ABCA (Army Bureau of Current Affairs),* New York University Film Library, describes how to lead a group discussion; *Assignment Tomorrow,* National Education Association, presents the challenge and importance of teaching; *Living and Learning in a Rural School,* New

York University Film Library; *Principles of the Art and Science of Teaching,* College of Education, University of Iowa; *Tips to Teachers,* Jam Handy Organization, emphasizes importance of teacher's personality in relationships with students; *Using the Classroom Film,* Encyclopaedia Britannica.

In connection with Chapters Four and Eight of this book the film, *Early Social Behavior,* made under the direction of Dr. Arnold Gesell at the Yale Clinic of Child Development, would help to stress the effect on the child of early child-parent relations. *Life Begins* and the *Study of Infant Behavior* are other films of the Yale Clinic.

Dynamic Education and *Dynamic Learning* are films from the Progressive Education Association presenting Dr. W. H. Kilpatrick and his discussions of the theories of learning. *Guidance in the Public Schools* shows the program in the Providence Public Schools as set forth by Dr. R. D. Allen of Providence, Rhode Island. *Design for Education* is a film developed from Constance Warren's book, *New Design for Women's Education,* and gives the story of Sarah Lawrence College at Bronxville, N. Y.

The McGraw-Hill Book Company is producing two series of text-films, one to be correlated with Diehl's *Textbook of Healthful Living,* and the other with Schorling's *Student Teaching.* The first series of text-films should be of value to counselors because it will deal with such health subjects as body care and grooming, personal health, group health, immunization, anatomy and physiology of reproduction, and emotional health. The other series of text-films should aid the counselor in the study of such teaching techniques as diagnosing a maladjusted student's difficulties, remedial techniques for a student's readjustment, behavior problems, planning the class project, and developing the class project.

Those who are instructing future counselors of American youth can often utilize current stage, screen, and radio productions as dramatic aids. A film or play seen by most of the class, such as *Junior Miss, A Tree Grows in Brooklyn,* or any of the Andy Hardy films, can serve to illustrate and aid in analyzing the behavior of young people.

Student Projects

Those who plan to carry counseling responsibilities in our secondary schools and colleges should go to their tasks prepared to use the best tools available and knowing the sources for finding out about new ones as they are developed. A teacher of such a group can instruct by example through her own use of audio-visual materials. However, this is not enough for adequate preparation to use these materials as counselors of young people. There must also be firsthand experience in selecting, constructing, using, and evaluating audio-visual aids. There must be direct attention to studying methods and sources.

If an opaque projector is available, groups of class members can collect cartoons, photographs, and clippings on various topics and carry the project through by preparing the material for projection and assuming leadership in class discussion of the subject. Another series of projects of individuals and groups can be centered in the changing displays on a class bulletin board. One or more members of a class may have a term paper assignment of developing audio-visual materials to use in the counseling of high-school boys and girls. There are at present varied materials pertaining to vocational and personal guidance developed for use with high-school students. There will be more in the future. An

assignment to explore these materials will prove helpful to prospective counselors.

Learning the techniques in planning, carrying out, and evaluating field trips should be part of a future counselor's preparation. Whenever possible, experience in conducting such trips with young people should be provided. Finding out about and using community resources for this purpose, such as museums, libraries, art galleries, industrial plants, recreation centers, suggest other student projects and assignments.

INDEX

H

I

J

K

L

M